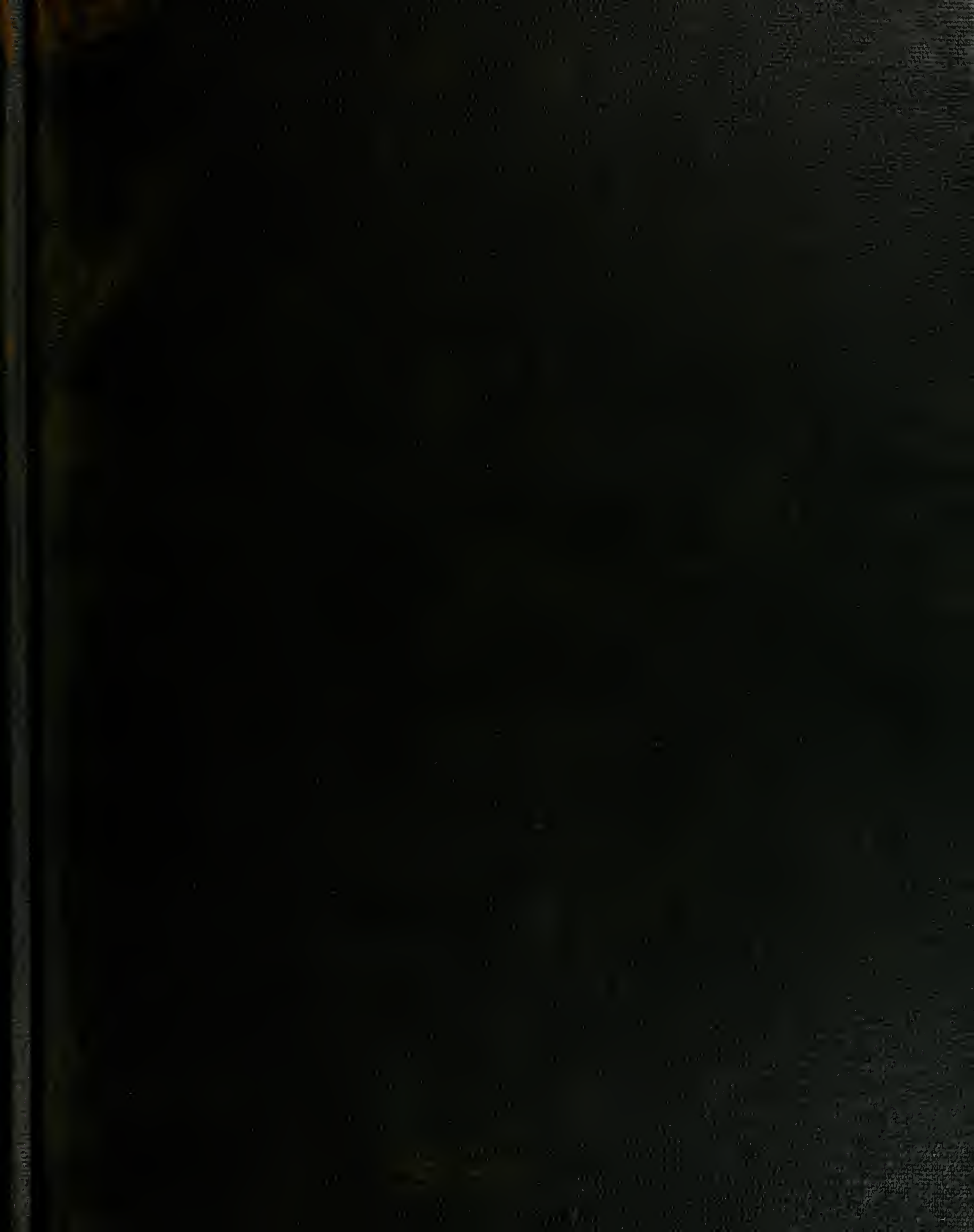


JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL.

TOME DIXIÈME. — ANNÉE 1894.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique;

Par M. Paul PAINLEVÉ.

INTRODUCTION.

1. Étant donné un système d'équations de Lagrange

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = \mathrm{Q}_i, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où les Q_i ne dépendent ni des vitesses ni du temps et où T, forme quadratique par rapport aux q'_i, est aussi indépendante de t

$$2\mathrm{T} \equiv \sum \mathrm{A}_{ij}\, q'_i\, q'_j \equiv \frac{ds^2}{dt^2} \qquad (\mathrm{A}_{ij} \equiv \mathrm{A}_{ji}),$$

on peut se demander s'il existe d'autres systèmes analogues (A_1) qui définissent *le même mouvement* que (A). La question ainsi posée est

assez restreinte, mais elle acquiert une tout autre portée si l'on assujettit seulement le système (A_1) à la condition que les *trajectoires* de (A) et de (A_1) *coïncident*, le mouvement sur ces trajectoires différant, en général, d'un système à l'autre. Autrement dit, le problème consiste à former les systèmes

$$(A_1) \quad \left\{ \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = q'_i \right. \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$2T_1 = \sum A'_{ij} q'_i q'_j = \frac{ds_1^2}{dt_1^2},$$

qui définissent *entre les* q_i les *mêmes* relations que (A). Deux tels systèmes (A) et (A_1) seront appelés CORRESPONDANTS.

2. A ce problème se rattache un problème d'apparence plus générale qui, pour être posé avec netteté, demande quelques explications. Le changement de variables

$$(1) \quad q_1 = \varphi_1(r_1, r_2, \ldots, r_k), \qquad \ldots, \qquad q_k = \varphi_k(r_1, r_2, \ldots, r_k),$$

d'où l'on tire inversement

$$(2) \quad r_1 = \psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \ldots, \qquad r_k = \psi_k(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

transforme ds^2 en une expression de même nature $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 = \sum A_{ij}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\, d\varphi_i\, d\varphi_j \equiv \sum B_{ij}(r_1, r_2, \ldots, r_k)\, dr_i\, dr_j,$$

et le système (A) en un système

$$(B) \quad \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tau}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial \tau}{\partial r_i} = R_i(r_1, r_2, \ldots, r_k), \qquad \frac{dr_i}{dt} = r'_i \right. \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$2\tau \equiv \frac{d\sigma^2}{dt^2}, \qquad R_i = Q_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_i} + \ldots + Q_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial \varphi_k}{\partial r_i}.$$

Nous dirons que les expressions ds^2 et $d\sigma^2$, et de même les systèmes

(A) et (B), sont HOMOLOGUES [1] et admettent la transformation (1) comme *transformation de passage*. En particulier, si ds^2 et $d\sigma^2$ [ou (A) et (B)] coïncident quand on fait $q_i = r_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, la transformation (1) sera une transformation du ds^2 [ou du système (A)] *en lui-même*.

A un ds^2 [ou à un système (A)] donné, une transformation (1) fait correspondre un homologue *et un seul;* inversement, entre deux expressions homologues ds^2 et $d\sigma^2$ [ou entre deux systèmes homologues (A) et (B)], il n'existe qu'une transformation de passage, à moins que ds^2 [ou (A)] n'admette des transformations en lui-même. En combinant, en effet, avec *une* transformation de passage une transformation *quelconque* du ds^2 [ou de (A)] en lui-même, on obtient une nouvelle transformation de passage et on les obtient toutes ainsi. Ces transformations du ds^2 [ou de (A)] en lui-même définissent toujours un *groupe*, continu si elles dépendent de constantes arbitraires, discontinu dans le cas contraire. (On démontre aisément qu'elles ne peuvent dépendre de fonctions arbitraires.) Il n'y a donc jamais de difficulté à reconnaître si deux expressions données ds^2 et $d\sigma^2$ [ou deux systèmes donnés (A) et (B)] sont homologues, non plus qu'à déterminer les transformations de passage, dans le cas où le groupe des transformations du ds^2 en lui-même est discontinu et notamment se réduit à la transformation identique. Mais, dans le cas où ce groupe est continu, les transformations de passage dépendent d'équations différentielles. D'après les théories de M. Lie, tout le problème revient à déterminer les transformations du ds^2 [ou de (A)] en lui-même, et cette recherche se ramène à l'*intégration d'un système linéaire complet*.

Observons enfin que, si (A) et (B) sont homologues, il en est de même *a fortiori* de ds^2 et de $d\sigma^2$, mais que la réciproque n'est évidemment pas vraie. En particulier, une transformation $q_i = \varphi_i$ du ds^2 en

---

[1] Quand les deux ds^2 que l'on compare portent sur les mêmes lettres, soit ds^2 et ds_1^2, ds_1^2 sera dit *homologue* de ds^2 s'il coïncide avec un des homologues de ds^2, soit $d\sigma^2$, où l'on a fait $r_i = q_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. De même (A) et ($A_1$) seront dits *homologues* si (A) coïncide avec un des systèmes (B) où l'on fait $r_i = q_i$ et $t = t_1$.

lui-même ne conserve (A) que si l'on a :

$$\sum_j Q_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial \varphi_j}{\partial r_i} \equiv Q_i(r_1, \ldots, r_k), \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Plus généralement, soit (A) et (B) deux systèmes homologues : quand ds^2 et $d\sigma^2$ admettent plusieurs transformations de passage, ces transformations $q_i = \varphi_i$ sont de deux espèces, suivant qu'elles satisfont ou non aux conditions

$$R_i \equiv Q_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_i} + \ldots + Q_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial \varphi_k}{\partial r_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k);$$

les premières seules transforment (A) en (B).

5. Ceci posé, cherchons tous les systèmes (B_1)

$$(B_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt_1}\left(\dfrac{\partial \tau_1}{\partial r'_i}\right) - \dfrac{\partial \tau_1}{\partial r_i} = R'_i(r_1, r_2, \ldots, r_k), \qquad \dfrac{dr_i}{dt_1} = r'_i \\ (i = 1, 2, \ldots, k), \end{cases}$$

où

$$2\tau_1 \equiv \sum B'_{ij}(r_1, r_2, \ldots, r_k) r'_i r'_j \equiv \frac{d\sigma_1^2}{dt_1^2},$$

tels que les trajectoires de (B_1) *se déduisent de celles de* (A) *par un changement de variables* (1), $q_i = \varphi_i$. Le changement de variables inverse (2) transformant (B_1) en un correspondant (A_1) de (A), les systèmes (B_1) en question se composeront *des homologues de* (A) *et des homologues de tous ses correspondants.* La seule difficulté consiste donc à déterminer les *correspondants* (A_1) de (A).

Parmi ces systèmes (B_1), il en est de remarquables, ce sont ceux où ds_1^2 se confond avec ds^2, quand on fait $q_i = r_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Si un tel système (B_1) existe, le mouvement défini par (A) jouit d'une propriété importante : *on peut dans* (A) *substituer aux forces* Q_i *d'autres forces,* à savoir les forces $R'_i(q_1, q_1, \ldots, q_k)$, *telles que les nouvelles trajectoires se déduisent des premières en changeant les* q_i *en* $\varphi_i(q_i, \ldots, q_k)$. Dans le cas particulier où les Q_i et les R'_i sont *identiques* [c'est-à-dire où (A) et (B_1) coïncident quand on fait $q_i = r_i$, $t = t_1$], *la transformation* $q_i = \varphi_i$ *transforme en lui-même l'en-*

semble des trajectoires de (A). D'autre part, il est clair que la transformation inverse (2) ramène (B_1) à être un *correspondant* (A_1) de (A) dont le ds_1^2 est *homologue* de ds^2. D'après cela, posons-nous les deux problèmes suivants :

I. *Déterminer les substitutions* (1), $q_i = \varphi_i$, *qui transforment en lui-même l'ensemble des trajectoires de* A.

II. *Déterminer les systèmes de forces* $R'_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ *telles que, si on les substitue aux* Q_i *dans* (A), *les nouvelles trajectoires se déduisent des premières en changeant les* q_i *en* $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$.

Pour résoudre le premier problème, il faut calculer *tous les correspondants* (A_1) *de* (A) *qui sont en même temps ses homologues*. Les transformations cherchées se composent de toutes les transformations qui font passer de (A) à chaque système (A_1); elles comprennent notamment les transformations de (A) en lui-même.

Pour résoudre le second problème, il faut calculer *tous les correspondants* (A_1) *de* (A) *dont le* ds_1^2 *est homologue de* ds^2. Toutes les transformations de passage qui existent entre ds^2 et chaque ds_1^2, soit $q_i = \varphi_i$, définissent les systèmes cherchés de forces R'_i, à savoir

$$R'_i = Q_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_i} + \ldots + Q_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial\varphi_k}{\partial r_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Elles comprennent notamment les transformations du ds^2 en lui-même.

4. Ce qui précède suffit à montrer l'intérêt qui s'attache à l'étude des systèmes *correspondants*. C'est à la démonstration de quelques propriétés générales de ces systèmes qu'est consacré le présent Mémoire. Dans un autre travail, je développerai les principales applications de ces propriétés et notamment la solution des problèmes I et II dans le cas de deux ou trois paramètres.

Si l'on convient de représenter un système (A) par le symbole

$\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$, ou encore $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ quand les Q_i dérivent d'un potentiel U, les principaux résultats que j'ai obtenus se résument ainsi :

En premier lieu, *un système quelconque* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *admet toujours une infinité de correspondants*, à savoir les systèmes $\left(C\frac{ds^2}{dt_1^2}, cQ_i\right)$, où C et c sont deux constantes. On peut passer du système (A) à un de ces correspondants (A_1) par la transformation : $\frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\frac{C}{c}}$ [1]. Quand toutes les forces Q_i sont nulles, on passe de (A) à (A_1) en faisant $\frac{dt_1}{dt} = c$, c désignant une constante *arbitraire*. Je dirai souvent dans la suite que ds^2 et $C\,ds^2$ sont deux ds^2 *semblables*, et de même que les systèmes de forces Q_i et cQ_i sont deux systèmes de forces *semblables*, ou encore que ds^2 et $C\,ds^2$ (et de même les systèmes Q_i et CQ_i) ne sont pas *distincts*.

Un système (A) *quelconque n'admet pas en général d'autres correspondants*. S'il en admet un, soit $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$, il en admet une infinité, à savoir $\left(\frac{C\,ds_1^2}{dt_1^2}, c\,Q'_i\right)$; nous dirons que ces correspondants ne sont pas *distincts* du premier.

En second lieu, admettons que *les* Q_i *dérivent d'un potentiel. Le système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ *admet une infinité de correspondants*, indiqués par M. Darboux, à savoir les systèmes $\left[(\alpha U + \beta)\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}\right]$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes assujetties à la seule condition $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. La correspondance entre (A) et un tel système (A_1) jouit d'une propriété remarquable : associons les trajectoires de (A) en *faisceaux naturels*, j'entends en faisceaux qui satisfont à la condition $T - U = h$, h étant une constante déterminée, et comparons les faisceaux naturels de (A) et de (A_1); on trouve que *tout faisceau naturel de* (A)

---

[1] Ce sont là des propriétés bien connues, signalées depuis longtemps par M. Bertrand dans ses travaux sur la *similitude* en Mécanique, et dont M. Appell, en faisant $\frac{C}{c} = -1$, a tiré une interprétation du *temps imaginaire*.

coïncide avec un faisceau naturel de (A_1), les valeurs de h et de h_1 se correspondant par la relation $h = \frac{\beta h_1 + \delta}{\alpha h_1 + \gamma}$. Cette propriété est *caractéristique de la transformation de M. Darboux*. On passe de (A) à (A_1) par la transformation

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\, dt_1^2 = (\alpha U + \beta)^2 [\alpha\, ds^2 - dt^2(\alpha U + \beta)].$$

Ces systèmes (A_1) se confondent avec ceux que j'ai indiqués en premier lieu pour $\alpha = 0$. *Un système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ *quelconque n'admet pas en général d'autres correspondants*. Nous donnerons à tous ces systèmes (A_1) le nom de *correspondants ordinaires* de (A).

3. J'arrive maintenant aux systèmes (A) qui possèdent des correspondants distincts de ces correspondants *ordinaires*. Il convient ici d'étudier à part le cas où il y a des forces et le cas où tous les Q_i sont nuls.

Premier cas. — *Tous les coefficients* Q_i *sont nuls dans* (A). Il en est de même alors nécessairement dans tout système correspondant (A_1). On se trouve ainsi ramené à l'étude des *couples de* ds^2 *correspondants*, en appelant ds^2 *correspondants* deux ds^2 dont les géodésiques coïncident. C'est, pour $k = 2$, le problème de M. Dini, et le théorème démontré par ce géomètre rentre comme cas particulier dans le suivant :

Soit ds^2 *et* ds_1^2 *deux* ds^2 *correspondants (non semblables), et* Δ *et* Δ_1 *leurs discriminants (relatifs aux* dq_i*). L'expression*

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds_1^2}{ds^2}$$

est une intégrale première des géodésiques; les expressions

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds_1^2}{dt^2}, \quad \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds^2}{dt_1^2}$$

sont donc respectivement des intégrales quadratiques des deux systèmes

$$\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right).$$

De plus on passe d'un système à l'autre par la transformation

$$(1) \qquad \frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}} = C \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}},$$

C désignant un nombre choisi arbitrairement (ou même, si l'on veut, une intégrale première quelconque des géodésiques). *Un ds^2 ne peut donc admettre de correspondant ds_1^2 (non semblable) sans que le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ admette au moins une intégrale quadratique distincte de celles des forces vives* (¹).

L'étude de ce cas particulier où les forces sont nulles entraîne d'importantes conséquences pour le cas général, notamment celle ci : SI ds^2 ET ds_1^2 SONT CORRESPONDANTS, 1° *pour tout système de forces Q_i, on peut trouver des forces Q'_i telles que les deux systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ soient correspondants, et l'on peut alors passer d'un système à l'autre par une transformation de la forme* (1) *où C est un nombre déterminé ;* 2° *deux correspondants $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ quelconques rentrent dans les précédents, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation* (1).

(¹) Cette intégrale ne se confond avec celle des forces vives que si $ds_1^2 \equiv C\, ds^2$. Il peut d'ailleurs arriver que ds^2 admette un correspondant et que le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ ne possède avec l'intégrale des forces vives qu'*une seule intégrale quadratique*, comme le montre l'exemple du couple de correspondants :

$$ds^2 \equiv \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + dq_3^2$$

et

$$ds_1^2 = \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + c\, dq_3^2,$$

où c est un nombre quelconque.

Cette proposition est complétée par une double réciproque :

I. *Si l'on peut passer d'un système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *à un système* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *où les* Q_i, Q'_i *sont* DONNÉS, *par un changement de variable tel que*

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

ds^2 *et* ds_1^2 *sont correspondants, et les résultats précédents s'appliquent.*

II. *Si deux systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *et* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *se correspondent pour* DEUX *systèmes distincts de forces associées, soient* Q_i *et* Q'_i *d'une part,* (Q_i) *et* (Q'_i) *d'autre part,* ds^2 *et* ds_1^2 *sont aussi correspondants; et par suite,* QUELS QUE SOIENT LES Q_i, *le système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *admet des correspondants de la forme* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$.

Cette dernière proposition suppose toutefois $k > 2$. Pour $k = 2$, on sait seulement que le nombre ν des systèmes associés (distincts) de forces Q_i, Q'_i *ne peut dépasser* 3 (ds^2 et ds_1^2 étant donnés) sans que les géodésiques de ds^2 et ds_1^2 coïncident (et ν est alors infini); si $\nu = 3$, ds^2 est le ds^2 d'une surface à courbure constante (de même que ds_1^2).

DEUXIÈME CAS. — *Les forces* Q_i *de* (A) *ne sont pas toutes nulles.* On démontre qu'on peut passer du système (A) à un système correspondant (A_1) par un changement de variables bien déterminé de la forme

$$\frac{dt_1^2}{dt^2} = \lambda^2(q_1, q_2, \ldots, q_k)\left(\frac{d\tau^2}{dt^2} - V\right) = \lambda^2(\tau - V),$$

l'égalité $\tau - V =$ const. *étant vérifiée par tout mouvement de* (A), ce qui exige *que* $\tau - V$ *soit ou une intégrale quadratique de* (A) *ou une constante absolue.* On se trouve amené alors à distinguer plusieurs hypothèses possibles :

I. $(\tau - V)$ *se réduit à une constante absolue;* $\frac{dt_1}{dt} = \lambda$. C'est le cas

traité précédemment où ds^2 et ds_1^2 sont CORRESPONDANTS; *le système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ *admet une intégrale quadratique.*

II. *Il existe une fonction de forces* U, *et* $\tau - V$ *coïncide avec* $T - (U + a)$. *Les deux systèmes* $\left[(U + a)\frac{ds^2}{dt'^2}, \frac{1}{U + a}\right]$ *et* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$, *dont le premier est un correspondant ordinaire de* (A) *sont correspondants en même temps que* $(U + a)ds^2$ *et* ds_1^2; ils jouissent donc des propriétés indiquées plus haut : le système

$$\left[(U + a)\frac{ds^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$$

admet une intégrale quadratique. Quant au système

$$\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right),$$

il admet une intégrale quadratique non seulement quand on annule les Q'_i, mais pour les Q'_i donnés.

III. (Hypothèse générale). — *L'égalité* $\tau - V =$ const. *définit une intégrale de* (A) *distincte de celle des forces vives. Les systèmes* (A) *et* (A_1) *admettent alors une intégrale quadratique.* Il convient de signaler dans cette hypothèse deux cas particuliers : *le cas où* U_1 *existe et où les géodésiques de* ds^2 *coïncident avec un faisceau naturel* $T_1 - U_1 = a_1$ de (A_1) [c'est l'hypothèse II où l'on a permuté (A) et (A_1)]; et *le cas où* U *et* U_1 *existent et où deux faisceaux naturels* $T - U = a$ *et* $T_1 - U_1 = a_1$ *de* (A) *et de* (A_1) *coïncident.* Dans l'un et l'autre cas, la transformation de M. Darboux permet de rentrer dans l'hypothèse I *où les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident* et, par suite, d'appliquer les conclusions énoncées à propos du premier cas.

6. Les propriétés que je viens d'énumérer sont des conditions *nécessaires mais non suffisantes* pour qu'un système (A) admette des correspondants ordinaires : elles ne sont suffisantes que pour $k = 2$. Mais ces propriétés permettent de former sans peine, et en les simpli-

fiant singulièrement, les conditions suffisantes, et parmi ces conditions elles représentent les plus importantes, celles qui mettent en évidence les caractères essentiels des systèmes (A) étudiés. Parmi les conséquences qu'elles entraînent, je citerai celles-ci :

Soient $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$ deux systèmes correspondants non ordinaires : 1° *on n'a jamais* $ds_1^2 = \mu(q_1, \ldots, q_k)\, ds^2$; 2° si Q_i et Q'_i dérivent des potentiels U et U_1, *il n'existe pas, en général, de faisceau naturel* $T - U = a$ *de* (A) *qui coïncide avec un faisceau naturel* $T_1 - U_1 = a$ *de* (A_1), *et il n'en existe* JAMAIS *plus d'un*. [Parmi les faisceaux naturels nous comptons le faisceau des géodésiques qui correspond à a (ou a_1) $= \infty$.]

Mais voici une autre conséquence bien plus importante : *La recherche des correspondants* (A_1) *d'un système* (A) *donné, et en particulier la recherche des groupes de transformations des trajectoires de* (A), *n'entraînent jamais que l'intégration de systèmes linéaires complets.*

Enfin, à toute intégrale de (A) *algébrique et entière* (*ou rationnelle*) *en* $q'_1, \ldots, q'_k$ *correspond une intégrale analogue et de même degré de* (A_1) (¹). Ceci s'applique notamment aux *intégrales linéaires* : d'où il résulte, d'après un théorème de M. Lie, que deux ds^2 correspondants possèdent *le même nombre de transformations infinitésimales en eux-mêmes*. De cette remarque et des théorèmes établis plus haut sur les correspondances qui conservent les géodésiques, découlent immédiatement toutes les propositions déjà connues sur la correspondance entre les mouvements plans et les mouvements sur une surface à courbure constante : et les propositions analogues se trouvent ainsi établies pour un nombre *quelconque* de paramètres.

7. Revenons maintenant aux problèmes que j'ai posés au début de cette introduction :

Tout d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement défini par (A) *puisse être défini par un autre système* (A_1) *sont évidemment les suivantes :* 1° (A) *et* (A_1) *doivent*

(¹) Ce théorème n'est nullement évident, mais résulte de la forme particulière de la relation qui existe entre dt et dt_1.

être correspondants en même temps que ds^2 et ds_1^2; 2° Δ et Δ_1 doivent être identiques (à un facteur constant près).

Quant aux systèmes B_1 (*voir* p. 8) dont les trajectoires se déduisent de celles de (A) par une transformation $q_i = \varphi_i(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, leurs propriétés découlent immédiatement des propriétés des systèmes (A_1). Je me borne à signaler explicitement ce théorème maintenant évident : *On peut, dans tous les cas, passer de* (A) *à* (B_1) *par un changement de variables*

$$q_i = \varphi_i(r_1, \ldots, r_k), \qquad \frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)[\tau - V], \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

l'expression $\tau - V$ *définissant une intégrale quadratique de* (A), *à moins qu'elle ne se réduise à une constante.* Dans ce dernier cas, la substitution $q_i = \varphi_i$ transforme l'un dans l'autre *les deux faisceaux de géodésiques; réciproquement, si les géodésiques de* (A) *et de* (B_1) *se correspondent par la transformation* $q_i = \varphi_i$, *on a*

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, \ldots, q_k),$$

et, QUELS QUE SOIENT LES Q_i *dans* (A), *il existe des systèmes* (B_1) *dont la force vive est* $\frac{d\sigma_1^2}{dt_1^2}$.

Si l'on connaît notamment *une transformation* $q_i = \varphi_i$ *des géodésiques de* ds^2 *en elles-mêmes*, pour tout système de forces Q_i de (A) on pourra calculer des forces R'_i telles que les trajectoires du système $\left[\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right]$ se déduisent des trajectoires de (A) en changeant q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$. Par exemple, la *transformation homographique* la plus générale conservant les géodésiques de $ds^2 \equiv dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2$, à tout système de forces Q_i on pourra associer des forces R'_i telles que les trajectoires de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et de $\left[\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right]$ se déduisent les unes des autres par une transformation homographique donnée. En appliquant à ce cas particulier les formules générales de correspondance établies dans ce Mémoire, on retrouve les résultats bien connus de M. Appell.

Je dirai enfin quelques mots d'un problème assez analogue à la recherche des correspondants et qui concerne les systèmes (A), où

les forces dérivent d'un potentiel U. On sait que chaque *faisceau naturel* de trajectoires $T - U = a$ coïncide avec les géodésiques de $(U + a) ds^2$. On peut chercher *si* $ds'^2 = (U + a) ds^2$ *admet, quel que soit* a, *un* ds^2 *correspondant* (*non semblable*), soit $ds_1'^2$. Il est clair que cette recherche rentre entièrement dans l'étude des couples de ds^2 correspondants. Mais quelle analogie peut-il exister entre les $ds_1'^2$ et les correspondants (A_1) de (A)? Tout d'abord, on voit sans peine que si ds'^2 possède (quel que soit a) un correspondant $ds_1'^2$, le système (A) possède toujours une infinité de correspondants distincts dépendant d'une constante arbitraire : la réciproque d'ailleurs n'est pas vraie. Mais la question précise qui nous intéresse est la suivante : Se peut-il qu'un des systèmes $\left[\frac{ds_1'^2}{dt'^2}, Q_i' = 0\right]$ (où $ds_1'^2$ dépend de a) se rattache à un certain système $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$, indépendant de a, de la même manière que $[ds'^2, Q_i = 0]$ se rattache à (A)? Cela revient à se demander si (A) peut admettre des correspondants non ordinaires $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$ tels que tout faisceau naturel de (A) soit faisceau naturel de (A_1); nous avons dit que cela n'avait jamais lieu. *La recherche des systèmes correspondants des* (A) *et celle des* ds^2 *correspondants de* $(U + a) ds^2$ *constituent donc toujours deux problèmes distincts.*

8. Je terminerai cette Introduction par un bref historique des recherches antérieures. Ce sont les travaux de M. Appell sur l'homographie en Mécanique qui m'ont conduit à étudier les questions générales dont traite ce Mémoire. Dans deux publications de l'*American Journal* (1889-1890), M. Appell avait montré qu'à tout mouvement plan (ou de l'espace ordinaire) on peut, à l'aide d'une transformation homographique quelconque, faire correspondre un autre mouvement plan (ou de l'espace) produit par d'autres forces (les forces étant toujours indépendantes des vitesses); et il avait donné de ce principe de remarquables applications à la théorie des forces centrales. A la fin du premier Mémoire, M. Appell posait, d'après M. Goursat, le problème plus général suivant : *Étant donnés deux* ds^2, *soit* ds^2 *et* ds_1^2, *pour tout système de forces* Q_i *existe-t-il des forces* R_i', *telles qu'on passe du système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *au système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, R_i'\right]$ *en changeant les* q_i *en*

$\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, *et* dt *en* $\lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)dt_1$? Il indiquait à ce sujet comme vraisemblable cette proposition (démontrée dans le cas de l'homographie) : *Si pour des forces* Q_i *quelconques* (ds^2 *et* ds_1^2 *étant donnés*), *la substitution* $q_i = \varphi_i$, $dt_1 = \lambda\, dt$, *transforme le système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *en un système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, R_i'\right]$, *elle fait correspondre les géodésiques de* ds^2 *et celles de* ds_1^2. Cette proposition, vérifiée par M. Dautheville pour $k = 2$, a été démontrée, ainsi que sa réciproque, par M. Appell lui-même dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique* (15 mars 1892). Dans une Note parue presque simultanément dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (12 avril 1892) ([2]), j'ai résumé les principaux résultats contenus dans ce travail, résultats qui renferment notamment la proposition précédente, mais complétée, ainsi qu'on l'a vu plus haut (n° 5, p. 11-13) : un des compléments les plus importants consiste en ce fait que, *si les deux faisceaux des géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *se transforment l'un dans l'autre par un changement des variables* q_i, *on peut toujours passer du système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$, *au système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, R_i' = 0\right]$ *en changeant les* q_i *en* $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$ ET dt EN $\lambda\, dt_1$. Par exemple, il suffit d'après cela de savoir que toute surface à courbure constante est représentable géodésiquement sur le plan, pour être assuré qu'à tout mouvement plan [où les forces $Q_1(q_1, q_2)$, $Q_2(q_1, q_2)$ sont quelconques], on peut faire correspondre un mouvement sur une surface à courbure constante.

La question que je m'étais posée me conduisait naturellement à généraliser le problème de M. Dini qui coïncide avec la recherche des correspondants dans le cas particulier où $k = 2$ et où les forces sont nulles. Sur ce problème, M. Liouville avait antérieurement publié deux Notes : dans la première (*Comptes rendus*, 6 avril 1891), il déterminait *tous les* ds^2 *à deux ou trois paramètres tels que le mouvement défini par le système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *fût défini aussi par un autre système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt^2}, Q_i' = 0\right]$, *et que de plus les discriminants* Δ

([1]) *Voir* aussi les *Comptes rendus* du 16 mai, du 13 juin, du 10 octobre, du 7 novembre, du 21 novembre 1892 et du 2 janvier 1893.

et Δ_1 *de* ds^2 *et* ds_1^2 *fussent identiques* (¹). Dans la seconde (*Comptes rendus,* 16 décembre 1891), consacrée aux intégrales quadratiques, M. Liouville observait que, si, pour $k=2$, les cas où le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ admet une intégrale quadratique sont aussi ceux où le problème de M. Dini a des solutions, pour $k > 2$ il n'en est plus de même, et annonçait des travaux ultérieurs sur la question. Après ma publication du 11 avril 1892, le même auteur a fait connaître (*loc. cit.*, 25 avril 1892) (²) les résultats qu'il avait obtenus par une méthode toute différente de la mienne. Cette méthode, qui repose sur les conditions suffisantes pour que deux ds^2 soient *correspondants,* met en évidence ce fait bien remarquable qu'*un* ds^2 *ne peut posséder un correspondant sans en posséder une infinité de la forme*

$$ds_1^2 = \frac{C^{k-1}\, d\sigma_{k-1}^2 + C^{k-2}\, d\sigma_{k-2}^2 + \ldots + C\, d\sigma_1^2 + d\sigma^2}{\delta^2},$$

où C est une constante arbitraire dont dépend δ; de là résulte pour le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ l'existence de $(k-1)$ intégrales quadratiques (en outre de l'intégrale des forces vives). Il reste toutefois à reconnaître si ces intégrales sont *distinctes :* un exemple cité plus haut (*voir* la note de la page 12) montre qu'elles peuvent se réduire *à une seule.*

La méthode de M. Liouville s'applique évidemment à la recherche des cas où $ds'^2 = (U+h)\,ds^2$ admet des correspondants quel que soit h ; mais cette recherche, comme je l'ai dit, est *toujours distincte* de celle des correspondants de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ et l'on n'en peut déduire aucune propriété de ces derniers systèmes. Les travaux de M. Liouville et les miens *ne se rencontrent donc que dans le cas où toutes les*

(¹) D'après ce qui précède, cette seconde condition est inutile, elle est toujours conséquence de la première (n° 7, p. 15) ; les ds^2 calculés par M. Liouville sont donc les seuls ds^2 à trois paramètres tels que le mouvement sur leurs géodésiques coïncide avec un autre mouvement analogue.

(²) *Voir* aussi les *Comptes rendus* du 23 mai, du 12 septembre, du 31 octobre et du 14 novembre 1892.

forces sont nulles. Il serait loisible toutefois de se servir des résultats de M. Liouville concernant les ds^2 correspondants pour étudier le cas où les systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$ se correspondent *avec conservation des géodésiques*, ainsi que les cas qui se ramènent à celui-là par la transformation de M. Darboux. Mais même pour traiter ces cas particuliers, j'aurai recours exclusivement, dans ce travail et dans les applications qui lui feront suite, à la méthode que j'ai exposée lors de ma première Communication.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes énumérés plus haut, j'indique immédiatement une notation qui me sera utile; il me faudra souvent prendre les dérivées des mêmes variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ par rapport aux deux variables différentes t et t_1 ou à l'une d'entre elles, soit q_1. Je représenterai invariablement par q'_i la dérivée $\frac{dq_i}{dt}$, par (q'_i) la dérivée $\frac{dq_i}{dt_1}$, par q'_{i0} la dérivée $\frac{dq_i}{dq_1}$; d'après cela, q'_1 sera égal à l'unité.

CHAPITRE I.

Propriétés générales des équations des trajectoires.

I. — Nombre de constantes dont dépendent les trajectoires.

1. J'établirai tout d'abord quelques propriétés très simples des équations différentielles dont dépendent les trajectoires.

Un système d'équations de Lagrange,

$$(A)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned} \right.$$

où

$$2T = \sum A_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_k) q'_i q'_j = \frac{ds^2}{dt^2} \qquad (A_{ij} = A_{ji}),$$

définit $(2k-1)$ des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ en fonction de l'une d'entre elles et de $(2k-1)$ constantes arbitraires. Ces constantes permettent, par exemple, de donner à $q_2, q_3, \ldots, q_k, q'_1, \ldots, q'_k$ des valeurs arbitraires pour $q_1 = q_1^0$. Les fonctions $q_2, q_3, \ldots, q_k$ de q_1 définies par (A) satisfont donc à un système différentiel dont l'ordre ν ne peut dépasser $2k-1$, ni devenir, d'autre part, inférieur à $2k-2$, car, pour q_1^0, les fonctions $q_2, q_3, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{q'_2}{q'_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1} = \frac{q'_k}{q'_1}$ peuvent prendre des valeurs arbitraires [1].

Il existe des systèmes (A) pour lesquels ν s'abaisse effectivement à $2k-2$: ce sont ceux *où tous les coefficients* Q_i *sont nuls*. Les trajectoires de (A) sont alors les *géodésiques du* ds^2 de T, et ces géodésiques dépendent de $(2k-2)$ constantes arbitraires. Il est facile, d'ailleurs, dans ce cas de former les équations différentielles des géodésiques. Supposons, en effet, le système (A) résolu par rapport aux q''_i, ce qui est toujours possible puisque le discriminant Δ de T n'est pas nul; nous obtenons les cinq équations

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = \mathrm{P}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où P_i est *une forme quadratique* par rapport aux q_i; ces équations s'écrivent encore, en supposant les différentielles prises par rapport à une variable auxiliaire $\theta = g(t)$,

$$\begin{aligned} &d^2 q_i \theta_t'^2 + dq_i\, d\theta\, \theta''_{t^2} \\ &\quad = \mathrm{P}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, dq_1, dq_2, \ldots, dq_k) \times \theta_t'^2 = \Pi_i \theta_t'^2, \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $d\theta\,\theta''_{t^2}\,\frac{1}{\theta_t'^2}$ entre deux de ces relations,

$$(1) \qquad d^2 q_i\, dq_j - dq_i\, d^2 q_j = \Pi_i\, dq_j - \Pi_j\, dq_i.$$

Si l'on fait $\theta = q_1$, par exemple, on a ainsi $(k-1)$ équations du second ordre résolues par rapport à $\frac{d^2 q_2}{dq_1^2}, \ldots, \frac{d^2 q_k}{dq_1^2}$. Ces équations sont, d'ailleurs, données explicitement par le principe de la moindre action.

---

[1] Il suit de là, comme il est bien connu, que (A) ne peut admettre d'intégrale première de la forme $\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k) = \text{const.}$ Il est bien entendu toutefois que le discriminant Δ de T n'est pas identiquement nul.

2. Je vais démontrer maintenant que, *ce cas écarté, les trajectoires dépendent de* $(2k-1)$ *constantes arbitraires* (¹). En effet, des équations (A) on tire, comme plus haut,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + \frac{\alpha_i}{\Delta}.$$

α_i désigne ce que devient Δ quand on y remplace les termes de $i^{\text{ième}}$ colonne par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$; et, par suite,

$$d^2 q_i \theta_t'^2 + dq_i\, d\theta\, \theta''_{t^2} = H_i \theta'_{t^2} + \frac{\alpha_i}{\Delta} d\theta^2 = \theta_t'^2 \left[H_i + \frac{\alpha_i}{\Delta} dt^2 \right],$$

d'où enfin

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dt^2}{\Delta} &= \frac{d^2 q_2\, dq_1 - d^2 q_1\, dq_2 - (H_2\, dq_1 - H_1\, dq_2)}{\alpha_2\, dq_1 - \alpha_1\, dq_2} \\ &= \frac{d^2 q_j\, dq_i - d^2 q_i\, dq_j - (H_j\, dq_i - H_i\, dq_j)}{\alpha_j\, dq_i - \alpha_i\, dq_j}. \end{aligned} \right.$$

Si notamment on prend q_1 comme variable indépendante, on aura

$$(3) \qquad \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} + \left(\Phi_1 \frac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i \right) = \left(\frac{\alpha_i}{\Delta} - \frac{\alpha_1}{\Delta} \frac{dq_i}{dq_1} \right) \frac{1}{\left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2},$$

où

$$\Phi_i = P_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, 1, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1} \right).$$

D'après l'égalité (3), $q_2, q_3, \ldots, q_k$ et $\frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}$ ayant reçu pour $q_1 = q_1^0$ des valeurs arbitraires, on peut encore disposer de $q_1'^0$ de façon à donner à $\frac{d^2 q_i}{dq_1^2}$ une valeur quelconque, à moins toutefois que le binome $\alpha_i - \alpha_1 \frac{dq_2}{dq_1}$ ne soit nul. Pour que les fonctions $q_2, \ldots, q_k$ de q_1 dépendent seulement de $2k-2$ constantes, il faut donc que les conditions

$$(4) \qquad \frac{\alpha_1}{q'_1} = \frac{\alpha_2}{q'_2} = \ldots = \frac{\alpha_k}{q'_k}$$

(¹) Ceci suppose $k > 1$. Pour $k = 1$, il n'y a plus à parler de relations entre les q_i.

soient vérifiées identiquement. Les α_i ne contenant pas les vitesses, cela ne peut avoir lieu que si tous les α_i, et, par suite *tous les* Q_i, *sont nuls* (¹).

5. Dans le cas où les Q_i ne sont pas tous nuls, voici comment on peut former les équations différentielles des trajectoires. Soit $\alpha_1 \neq 0$; on écrit d'abord les $(2k-2)$ équations :

$$(5)\qquad \frac{\dfrac{d^2 q_2}{dq_1^2} + \Phi_1 \dfrac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} = \frac{\dfrac{d^2 q_i}{dq_1^2} + \Phi_1 \dfrac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i}{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}} \qquad (i = 3, \ldots, k);$$

d'autre part, si l'on pose

$$\chi_i = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i, \qquad \psi_i = \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_i - \alpha_1 \frac{dq_i}{dq_1}\right) \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

de l'égalité

$$\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}}{\left(\dfrac{d^2 q_i}{dq_1^2}\right) + \Phi_1 \dfrac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2} = \frac{\psi_2}{\chi_2},$$

on tire

$$2\frac{d^2 q_1}{dt^2} = \frac{d}{dq_1}\frac{\psi_2}{\chi_2},$$

et, en remplaçant $\dfrac{d^2 q_1}{dt^2}$ par sa valeur $\Phi_1 \left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)^2 + \dfrac{\alpha_1}{\Delta} = \Phi_1 \dfrac{\psi_2}{\chi_2} + \dfrac{\alpha_1}{\Delta}$, il vient

$$(6)\qquad \frac{d}{dq_1}\log \chi_2 + 2\Phi_1 = \frac{d}{dq_1}\log \psi_2 - 2\frac{\alpha_1}{\Delta}\frac{\chi_2}{\psi_2},$$

équation qui est de la forme

$$(6)'\qquad \frac{d}{dq_1}\chi_2 + \chi_2 \frac{M}{\psi_2} = 0$$

où M est un polynome par rapport aux dérivées.

(¹) Quand les forces Q_i dépendent des vitesses, il suffit (pour que $\nu = 2k-2$) que les α_i satisfassent aux conditions (4).

En définitive, on forme ainsi un système de la forme

$$
\begin{aligned}
q'''_{(2)} &= f_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, q'_3, \ldots, q'_k, q''_{(2)}),\\
q''_{(i)} &= f_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, q'_3, \ldots, q'_k, q''_{(2)}) \qquad (i = 3, 4, \ldots, k),
\end{aligned}
$$

en posant

$$
q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1}, \qquad q''_{(i)} = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2}, \qquad q'''_{(2)} = \frac{d^3 q_2}{dq_1^3},
$$

système qui peut être rendu plus symétrique, mais cela importe peu pour notre objet.

Je remarque immédiatement que *les géodésiques de ds^2 font partie des trajectoires, quelles que soient les forces* Q_i. En effet, les équations

$$
Z_2 = \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Z_k = \frac{d^2 q_k}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_k}{dq_1} - \Phi_k = 0,
$$

qui définissent les géodésiques entraînent les relations (5), (6). L'égalité (3) nous montre d'ailleurs que, en un point quelconque de ces trajectoires, q'_1 *est infini :* autrement dit, les géodésiques forment un faisceau de trajectoires à $(2k-2)$ paramètres, à savoir le faisceau obtenu en imposant aux constantes initiales la condition $\frac{1}{q'_1} = 0$ $\left(\text{ou } \frac{1}{T_0} = 0, \text{ si } T_0 \text{ désigne la demi-force vive initiale}\right)$; cette condition reste alors réalisée tout le long de la trajectoire. C'est là, d'ailleurs, une proposition qu'on aurait pu établir d'une tout autre manière.

Je vais maintenant insister sur quelques différences caractéristiques qui séparent le cas où les forces sont nulles du cas général.

II. — Systèmes où tous les coefficients Q_i sont nuls.

4. Nous avons dit que si toutes les forces sont nulles, les trajectoires dépendent de $(2k-2)$ constantes, et, d'après le principe de la moindre

action, peuvent être définies par le système

$$(\alpha) \qquad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_{(2)}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_{(k)}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0,$$

en posant

$$q'_{(2)} = \frac{dq_2}{dq_1}, \qquad \ldots, \qquad q'_{(k)} = \frac{dq_k}{dq_1}$$

et

$$f = \sqrt{\mathrm{T}(q_1, q_2, \ldots, q_k, 1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}.$$

Admettons maintenant qu'on ait intégré ces équations et qu'on connaisse par suite $q_2, q_3, \ldots, q_k$ en fonction de q_1 et de $(2k-2)$ constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$. De quelle manière sera déterminé t? On aura, d'après le théorème des forces vives,

$$dt = h\,ds = h \times (f) \times dq_1,$$

h désignant une nouvelle constante, et (f) la fonction de q_1 obtenue en remplaçant dans f, $q_2, \ldots, q_k$ et $q'_{(2)}, \ldots, q'_k$ en fonction de q_1 et des constantes. Il est loisible d'écrire

$$h = g(a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}, h_0),$$

et, comme d'autre part

$$\begin{aligned} a_i &= \mathrm{F}_i[q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}] \\ &= \mathrm{F}_i[q_1^0, q_2^0, \ldots, q_k^0, q'^0_{(2)}, \ldots, q'^0_{(k)}] \end{aligned}$$

est une intégrale première des géodésiques, on voit que *dt vérifie l'équation*

$$(\beta) \qquad dt = \mathrm{G}[q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}, h_0]\,f\,dq_1,$$

où G représente une intégrale première quelconque des géodésiques dépendant d'un paramètre arbitraire h_0.

Inversement, admettons qu'une relation

$$(\gamma) \qquad dt = \mathrm{H}[q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]\,dq_1.$$

soit compatible avec (α); j'entends par là que la fonction $t(q_1)$, définie par (γ) quand on remplace dans H les q_i et les $q'_{(i)}$ en fonction de q_1, vérifie les équations du mouvement. On devra avoir (après cette substitution)

$$H = hf,$$

h étant constant pour la même géodésique (et cela quelle que soit la géodésique considérée); donc $\frac{H}{f}$ est *une intégrale première des géodésiques*.

Étant donné un système (A) sans forces Q_i, on voit que, si à dt on substitue $G\,dt$, G étant ou une constante ou une intégrale première quelconque des géodésiques, le système (A) n'est pas altéré.

5. Aux systèmes (A) sans forces peuvent se ramener, d'après une remarque de M. Darboux, les systèmes (A) *où les forces dérivent d'un potentiel* U. Cela résulte du principe de la moindre action : les équations

$$(a) \qquad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_{(i)}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

où

$$f = \sqrt{(U+h)\,T(q_1, q_2, \ldots, q_k, 1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})},$$

définissent à la fois les géodésiques de $ds_1^2 = (U+h)\,ds^2$, et les trajectoires de (A) qui correspondent à la valeur h de la constante des forces vives. Mais il faut bien observer que le mouvement sur ces trajectoires défini par (A),

$$(A) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

diffère du mouvement défini par (A_1),

$$(A_1) \qquad \frac{d}{dt_1}\left[\frac{\partial T_1}{\partial (q'_i)}\right] - \frac{dT_1}{dq_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = (q'_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$T_1 = (U+h)\frac{ds^2}{dt_1^2} = \frac{ds_1^2}{dt_1^2}.$$

On a, en effet, d'après (A),

$$dt^2 = \frac{ds^2}{U+h},$$

et, d'après (A_1),

$$dt_1^2 = \alpha(U+h)\,ds^2,$$

α désignant une nouvelle constante arbitraire [ou une intégrale première quelconque de (a)]; on passera donc du premier mouvement au second en changeant dt^2 en $\frac{dt_1^2}{\alpha(U+h)^2}$, α étant une constante quelconque.

D'après cela, introduisons dans (A) et dans (A_1) les variables canoniques : soit $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ et $p'_i = \frac{\partial T_1}{\partial (q'_i)} = (U+h)\,p_i\,\frac{(q'_i)}{q'_i}$. Le long de chaque trajectoire, on aura

$$p_i = \sqrt{\alpha}\,p'_i,$$

α étant une constante.

En appelant T′ et T'_1 ce que deviennent T et T_1 quand on y remplace respectivement les q'_i et les (q'_i) en fonction des p_i et des p'_i, il vient, d'après (A),

$$T' = U + h,$$

et, d'après (A_1),

$$T'_1 = \alpha(U+h).$$

A une intégrale première de (A_1), qu'on peut toujours supposer homogène en $p'_1, \ldots, p'_k$, soit

$$F_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, p'_1, p'_2, \ldots, p'_k, h) = C,$$

correspond une intégrale de (A),

$$\begin{aligned} &F_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k, h) \\ &\quad = F_1[q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k, (T' - U)] = C; \end{aligned}$$

inversement, toute intégrale première de (A),

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k) = C,$$

peut être rendue homogène par la substitution à p_i de $p_i\sqrt{\frac{U+h}{T'}}$, et

l'expression $F_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k, h)$ ainsi obtenue, où l'on remplace les p_i par les p'_i, est une intégrale première de (A_1).

En particulier, quand (A) admet une intégrale algébrique et entière par rapport aux vitesses, soit $P_m + P_{m-2} + P_{m-4} + \ldots = C$, le système (A_1) admet une intégrale analogue et de même degré, à savoir $P_m + \frac{T'}{U+h} P_{m-2} + \frac{T'^2}{(U+h)^2} P_{m-4} + \ldots = C$, où les p_i sont remplacés par les p'_i (¹). Inversement, si (A_1) admet, quel que soit h, une intégrale de cette forme, (A) admet une intégrale entière de degré m. Mais ici une question se pose : *toute intégrale algébrique et entière de* (A_1), *qui existe quel que soit* h, *est-elle nécessairement de cette forme?* Par exemple, quand A_1 admet, pour h quelconque, une intégrale quadratique, cette intégrale peut-elle toujours s'écrire

$$P_2 + \frac{T'}{U+h} P_0 = C,$$

P_2 et P_0 étant indépendants de h? La réponse est affirmative, mais il n'est nullement évident qu'il en doive être ainsi. Je me borne à signaler ici cette proposition qui ne nous est pas indispensable, sans en développer la démonstration qui est délicate.

Des remarques analogues s'appliqueraient aux intégrales rationnelles.

III. — Systèmes où les forces ne sont pas nulles.

6. Quand les coefficients Q_i d'un système (A) (où k est plus grand que 1) ne sont pas tous nuls, une fois intégrées les équations différentielles des trajectoires, $\frac{dt}{dq_1}$ est donné en fonction de q_1 par une quel-

(¹) Remarquons bien que ceci suppose essentiellement qu'on ait introduit les variables canoniques; si l'on garde les variables q_i et leurs différentielles, une intégrale quadratique de (A), soit $d\sigma^2 - V\,dt^2 = C\,dt^2$, correspond à l'intégrale de (A_1) :

$$(U+h)^2 \left[d\sigma^2 - \frac{V}{(U+h)} ds^2 \right] = C\,dt_1^2.$$

conque des égalités (*voir* p. 22-23)

$$(2)\qquad \frac{1}{\Delta}\frac{dt^2}{dq_1^2} = \frac{\dfrac{d^2 q_i}{dq_1^2} + \Phi_1 \dfrac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i}{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}} = \frac{\chi_i}{\psi_i},$$

où $q_2, q_3, \ldots, q_k$ sont exprimés en fonction de q_1 et de $(2k-1)$ constantes arbitraires.

Ces égalités, on peut le remarquer en passant, conduisent à distinguer les trajectoires *réelles* Γ de (A) en deux classes, Γ' et Γ'', suivant que le signe commun des expressions $\frac{\chi_i}{\psi_i}$ (qui est celui de T) le long d'une de ces trajectoires est positif ou négatif : sur les premières seules le mouvement est réel ; sur les secondes, il est imaginaire.

Si *dans* (A) *on substitue aux* Q_i *les forces* $Q'_i = cQ_i$, *les trajectoires ne sont pas modifiées,* et l'on passe du premier système au second en changeant t en $\sqrt{c}\,t + a$, c'est-à-dire dt en $\sqrt{c}\,dt$, transformation qui est *unique* d'après (2) du moment que les forces Q_i ne sont pas nulles.

Si c est positif, les mouvements réels restent réels; si c est négatif, les trajectoires réelles Γ' du premier système deviennent les trajectoires Γ'' du second, et *vice versa*. Les transformations particulières $t = it_1$ et $t = -t_1$ donnent lieu à des remarques bien connues sur le cas où l'on change le sens soit de toutes les forces, soit de toutes les vitesses, sans changer leur direction ni leur grandeur.

Il importe d'observer que *les forces* $Q'_i = cQ_i$ *sont les seules qui substituées aux forces* Q_i *dans* (A) *engendrent les mêmes trajectoires*. Considérons, en effet, les équations différentielles des trajectoires

$$(5)\qquad \frac{\chi_2}{\psi_2} = \frac{\chi_3}{\psi_3} \cdots = \frac{\chi_k}{\psi_k},$$

$$(6)\qquad \frac{d}{dq_1}\log\chi_2 + 2\Phi_1 = \frac{d}{dq_1}\log\psi_2 - \frac{2\alpha_1}{\Delta}\frac{\chi_2}{\psi_2},$$

où

$$\chi_i = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i, \qquad \psi_i = \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_i - \alpha_1 \frac{dq_i}{dq_1}\right) \quad (^1);$$

---

(1) Il convient d'observer que les χ_i sont définis à l'aide des seuls coefficients de T sans que les Q_i interviennent.

les $(k-2)$ équations (5) sont de la forme

$$(5)' \qquad \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} = \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} \cdot \frac{\alpha_i - \alpha_2 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} + \mathrm{L}_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, k),$$

où L_i ne renferme plus que des dérivées premières, et l'équation (6) peut s'écrire

$$(6)' \qquad \frac{d^3 q_2}{dq_1^3} = \mathrm{L}_2 = \chi_2 \frac{d}{dq_1} \log \alpha_1 + \mathrm{L}'_2,$$

L'_2 étant défini à l'aide des coefficients de T et des rapports $\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}$.

Supposons maintenant qu'aux Q_i on substitue des forces Q'_i : pour que les trajectoires restent les mêmes, il faut que les seconds membres de (5)′ et de (6)′ ne soient pas altérés; on doit donc avoir

$$\frac{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} = \frac{\alpha'_i - \alpha'_1 \dfrac{dq_i}{dq_2}}{\alpha'_2 - \alpha'_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} \qquad (i = 3, 4, \ldots, k),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha'_2}, \ldots, = \frac{\alpha_k}{\alpha'_k};$$

et, d'autre part [d'après (6)′],

$$\frac{d}{dq_1} \log \alpha_1 \equiv \frac{d}{dq_1} \log \alpha'_1,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \log \alpha_1 = \frac{\partial}{\partial q_1} \log \alpha'_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial q_k} \log \alpha_1 = \frac{\partial}{\partial q_k} \log \alpha'_1,$$

par suite

$$\alpha'_1 = c\alpha_1.$$

c étant une constante. On arrive ainsi aux conditions

$$\alpha_1 = c\alpha_1, \qquad \alpha'_2 = c\alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha'_k = c\alpha_k,$$

d'où l'on déduit aussitôt

$$Q'_1 = cQ_1 \qquad Q'_2 = cQ_2, \qquad \ldots, \qquad Q'_k = cQ_k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Plus généralement, le système (A_1)

$$(A_1) \quad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q'_i, \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$T = \frac{ds_1^2}{dt_1^2} = C\,\frac{ds^2}{dt_1^2}, \qquad Q'_i = cQ_i,$$

définit les mêmes trajectoires que (A) : d'après ce qui précède, *ces systèmes constituent les seuls correspondants de* (A) *où* ds_1^2 *ne diffère de* ds^2 *que par un facteur constant.*

J'ajoute qu'on passe de (A) à (A_1) par la transformation

$$dt = \sqrt{\frac{c}{C}}\,dt_1.$$

Cette transformation est *pleinement déterminée,* à l'inverse de ce qui se passe dans le cas où les forces sont nulles; dans ce dernier cas, on a, comme on sait, $\frac{dt}{dt_1} = \alpha$, α désignant une constante arbitraire ou une intégrale première quelconque des géodésiques.

7. Étant donné un système (A) où T est une force vive bien déterminée, les trajectoires qui correspondent à un système de forces quelconque $Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ renferment un faisceau commun à $(2k-2)$ paramètres, à savoir les géodésiques de ds^2. *Existe-t-il d'autres faisceaux à* $(2k-2)$ *paramètres qui fassent partie des trajectoires, quelles que soient les forces* Q_i? Il est facile de voir que non de la manière suivante : un tel faisceau devrait vérifier les équations (5) et (6) quels que fussent les Q_i, et, par suite, vérifier l'équation (7) obtenue en retranchant les deux équations (6) relatives respectivement aux forces Q_i et Q'_i; si l'on observe que les Φ_i ne dépendent que de T et que seuls les α_i varient avec les forces, on voit que cette équa-

tion (7) peut s'écrire, une fois supprimé le facteur $\chi_2 = 0$ qui donne les géodésiques,

$$\frac{d}{dq_1} \mathrm{L} \frac{\psi_2}{\psi_2'} - 2 \frac{\chi_2}{\Delta} \left(\frac{\alpha_1}{\psi_2} - \frac{\alpha_1'}{\psi_2'} \right) = 0,$$

ou encore

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3 \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} + 2 \Phi_1 \frac{dq_2}{dq_1} - 2 \Phi_2 \\ & \quad = \frac{1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \frac{d}{dq_1} \frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} - \left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \frac{d}{dq_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] \right. \\ & \qquad \left. + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \frac{d}{dq_1} \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \right) \Big] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on substitue aux Q_i' d'autres forces Q_i'', on obtient une nouvelle équation (7), et en retranchant ces deux équations membre à membre, on obtient une relation où ne figurent plus que *des dérivées premières*, et qui ne se réduit pas à une identité quand les Q_i, Q_i', Q_i'' sont pris arbitrairement. D'autre part, les trajectoires considérées satisfont aux équations (5) : elles ne sauraient donc dépendre que de $(2k-3)$ constantes au plus.

Mais on peut aller plus loin, quand le nombre k des paramètres dépasse 2 et montrer que, *si dans un système* (A) *on substitue aux forces* Q_i *d'autres forces* Q_i', *il ne saurait exister en dehors des géodésiques un faisceau de trajectoires à* $(2k-2)$ *paramètres communs au premier et au second mouvement.*

Ceci suppose, bien entendu, qu'*on n'ait pas* $Q_i' = c\,Q_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, c étant une constante, puisqu'alors toutes les trajectoires coïncident.

Pour démontrer cette proposition, admettons qu'il existe un tel faisceau et représentons par

$$\frac{d^2 q_i}{dq_1^2} = f_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right) \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

les équations qui le définissent. On devra avoir, d'après (5),

$$\frac{f_2 + \frac{dq_2}{dq_1} \Phi_1 - \Phi_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \frac{dq_2}{dq_1}} = \frac{f_i + \frac{dq_i}{dq_1} \Phi_1 - \Phi_i}{\alpha_i - \alpha_1 \frac{dq_i}{dq_1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

l'un au moins des numérateurs de ces rapports (soit le premier χ_2) n'étant pas identiquement nul; car autrement le faisceau serait celui des géodésiques. On tire de là

$$\frac{\alpha_i - \alpha_1 \frac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \frac{dq_i}{dq_1}} = \frac{f_i + \frac{dq_i}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_i}{f_2 + \frac{dq_2}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_2};$$

on aurait de même

$$\frac{\alpha'_i - \alpha'_1 \frac{dq_i}{dq_1}}{\alpha'_2 - \alpha'_1 \frac{dq_2}{dq_1}} = \frac{f_i + \frac{dq_i}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_i}{f_2 + \frac{dq_2}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_2},$$

donc

$$\frac{\alpha'_i - \alpha'_1 \frac{dq_i}{dq_1}}{\alpha'_2 - \alpha'_1 \frac{dq_2}{dq_1}} = \frac{\alpha_i - \alpha_1 \frac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \frac{dq_2}{dq_1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

ce qui exige

$$\frac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha'_2} = \cdots = \frac{\alpha_k}{\alpha'_k}.$$

Mais, d'autre part, s'il en est ainsi, l'équation (6) peut s'écrire (pour les forces Q_i),

$$\frac{d^3 q_2}{dq_1^3} = \chi_2 \frac{d}{dq_1}\log\alpha_1 + L'_2,$$

et pour les forces Q'_i,

$$\frac{d^3 q_2}{dq_1^3} = \chi_2 \frac{d}{dq_1}\log\alpha'_1 + L'_2.$$

L'_2 étant le même dans les deux cas, d'après une remarque précédente, puisque T ne change pas, non plus que les rapports $\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$; par suite ($\chi_2$ étant différent de zéro), l'égalité

$$\frac{d}{dq_1}\log\alpha_1 - \frac{d}{dq_1}\log\alpha'_1 = 0,$$

qui ne renferme pas les dérivées secondes, devra être vérifiée *identiquement*, c'est-à-dire qu'on aura

$$\alpha'_1 = c\alpha_1,$$

c étant une constante, ce qui entraîne

$$\alpha'_i = c\alpha_i \quad \text{et} \quad Q'_i = cQ_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Le théorème est donc démontré.

On voit que le raisonnement suppose essentiellement $k > 2$. *Pour $k = 2$, le théorème n'est plus exact :* par exemple, les deux systèmes d'équations de Lagrange

$$(A) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= g, \end{aligned} \right.$$

et

$$(A') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= ky^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= k'; \end{aligned} \right.$$

où g, k, k' sont des constantes, correspondent à la même force vive $T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$ et à des forces distinctes $Q_1 = 0$, $Q_2 = g$ d'une part, $Q'_1 = ky^{-\frac{3}{2}}$, $Q'_2 = k'$, d'autre part, qui ne satisfont pas aux conditions $Q'_1 = cQ_1$, $Q'_2 = cQ_2$. Les trajectoires de (A) et de (A') comprennent néanmoins, en dehors des géodésiques, un faisceau commun à deux paramètres, à savoir les paraboles

$$y = (ax + b)^2,$$

où a et b sont deux constantes arbitraires. Mais le raisonnement précédent montre alors qu'*il ne saurait exister (en dehors des géodésiques) plus d'un faisceau à $(2k - 2) \equiv 2$ paramètres communs aux deux systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *et* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q'_i\right)$.

IV. — Correspondants ordinaires d'un système (A).

8. Les considérations précédentes nous seront d'une grande utilité dans l'étude des systèmes correspondants. Dès maintenant nous

voyons qu'elles mettent en évidence certains *correspondants* attachés à tout système. Étant donné un système (A) quelconque, le système

$$(A_1) \qquad \frac{d}{dt_1}\left[\frac{\partial T_1}{\partial (q_i')}\right] - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q_i', \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = (q_i'), \qquad (i=1, 2, \ldots, k),$$

où

$$T_1 = \frac{C\,ds^2}{dt_1^2}, \qquad Q_i' = c\,Q_i,$$

définit les mêmes trajectoires que (A). Il n'existe pas d'autres correspondants où ds_1^2 ne diffère de ds^2 de T que par un facteur constant. On passe du premier mouvement au mouvement (A_1) par le changement de variable $\frac{dt}{dt_1} = \sqrt{\frac{c}{C}}$ qui est entièrement déterminée. Dans le cas toutefois où les forces sont nulles, la transformation la plus générale qui permet de passer de (A) à (A_1) est de la forme $\frac{dt}{dt_1} = \alpha$, où α désigne à volonté une constante arbitraire ou une intégrale première quelconque des géodésiques.

Comme deux correspondants d'un même système sont correspondants l'un par rapport à l'autre, on voit que l'existence d'un correspondant (A_1) quelconque de (A) entraîne celle d'une infinité d'autres correspondants, à savoir ceux qu'on déduit du premier (A_1) en multipliant T_1 et les Q_i' par deux facteurs constants C et c.

9. Nous verrons dans un Chapitre suivant qu'un *système* (A) *pris au hasard n'admet pas en général d'autres correspondants*. Mais supposons maintenant que les forces Q_i dérivent d'un potentiel U. Les trajectoires de (A), pour la valeur h de la constante des forces vives, coïncident avec les géodésiques de $ds'^2 = (U + h)\,ds^2$. D'après cela, considérons le système (A_1), où $T_1 \equiv (\alpha U + \beta)\frac{ds^2}{dt_1^2}$, et où les Q_i' dérivent du potentiel $U' = \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}$ (avec la condition $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$). Les trajectoires de (A_1), pour la valeur h_1 de la constante des forces vives, coïncident avec les géodésiques de

$$ds_1'^2 = [\gamma U + \delta + h_1(\alpha U + \beta)]\,ds^2.$$

Les trajectoires de (A), pour une valeur donnée de h, coïncident donc avec les trajectoires de (A_1) pour lesquelles la constante h_1 vérifie l'égalité

$$h = \frac{\delta + \beta h_1}{\gamma + \alpha h_1} \qquad \text{ou} \qquad h_1 = \frac{\delta - \gamma h}{\alpha h - \beta}.$$

Les systèmes (A) et (A_1) sont donc *correspondants*, et chaque famille *naturelle* $h = h_0$ de trajectoires de (A) coïncide avec une famille naturelle $h_1 = h_1^0$ de (A_1). D'autre part, on a

$$ds^2 = (U + h)\,dt^2 = \left(U + \frac{\delta + \beta h_1}{\gamma + \alpha h_1}\right) dt^2,$$

et

$$(\alpha U + \beta)\,ds^2 = \left(\frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta} + h_1\right) dt_1^2;$$

d'où l'on tire

$$(a) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma)\,dt_1^2 = (\alpha U + \beta)^2 [\alpha\,ds^2 - (\alpha U + \beta)\,dt^2].$$

Cette transformation (a), qui permet de passer de (A) à (A_1) est d'ailleurs *unique;* en effet, dans (A) et dans (A_1) on peut exprimer $\frac{d^2 q_2}{dq_1^2}$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}, \frac{dq_k}{dt}$, et en égalant ces deux valeurs de $\frac{d^2 q_2}{dq_1^2}$, on obtient une relation bien déterminée entre $q_1, q_2, \ldots, q_k, dq_1, dq_2, \ldots, dq_k, dt$ et dt_1 (¹). Cette relation unique doit donc coïncider avec celle que nous venons d'obtenir, ce qu'il est bien facile de vérifier en faisant le calcul.

Ces nouveaux *correspondants* (A_1) coïncident avec les premiers pour $\alpha = 0$.

Comme il est loisible d'augmenter la fonction de forces d'une constante, on peut toujours, pour $\alpha \neq 0$, supposer U' de la forme $U' = \frac{\delta}{\alpha U}$. L'équation (a) devient alors

$$(a') \qquad \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\delta} U^2 \left(\frac{ds^2}{dt^2} - U\right) = \frac{\alpha^2}{\delta} U^2 h,$$

(¹) Nous revenons d'ailleurs sur ce point au début du troisième Chapitre.

ou encore

$$\frac{dt^2}{dt_1^2} = \frac{1}{\alpha U^2}\left(\alpha U \frac{ds^2}{dt_1^2} - \frac{\delta}{\alpha U}\right) = \frac{h_1}{\alpha U^2}.$$

Ces égalités nous montrent que les expressions $\frac{1}{U}\left(\frac{dt_1}{dt}\right)$ et $U\frac{dt}{dt_1}$ sont respectivement des intégrales de (A) et de (A_1), à savoir les deux intégrales des forces vives.

A toute intégrale première de (A) correspond une intégrale première de (A_1) obtenue en remplaçant dt en fonction de dt_1 d'après (a'). A une intégrale algébrique et entière (ou rationnelle) correspond une intégrale analogue de même degré. Par exemple, à une intégrale du second degré de (A), soit

$$d\sigma^2 - V\,dt^2 = k\,dt^2,$$

correspond l'intégrale de (A_1)

$$d\sigma^2 - \frac{V\,ds^2}{U} + \frac{\delta}{\alpha^2}\,\frac{V\,dt_1^2}{U^3} = \frac{k h_1}{\alpha U^2}\,dt_1^2,$$

c'est-à-dire

$$U^2\left(d\sigma^2 - \frac{V\,ds^2}{U} + \frac{\delta}{\alpha^2}\,\frac{V\,dt_1^2}{U^3}\right) = k_1\,dt_1^2.$$

Cette transformation a été indiquée par M. Darboux. Il est clair que les correspondants (A_1) déduits de (A) par cette transformation coïncident avec ceux qu'on déduirait d'un quelconque des transformés (A_1).

Un système (A) à potentiel, pris au hasard, n'admet pas en général d'autres correspondants. C'est ce qui va résulter de l'étude générale des systèmes correspondants (A), (A_1), où (A_1) n'est pas un des correspondants *ordinaires* $\left(C\frac{ds^2}{dt_1^2}, cQ_i\right)$ ou $\left[(\alpha U+\beta)\frac{ds^2}{dt_1^2}, \frac{\gamma U+\delta}{\alpha U+\beta}\right]$ de (A).

CHAPITRE II.

Systèmes correspondants où toutes les forces sont nulles.

I. — Démonstration d'une propriété générale de ces systèmes.

1. Soient (A) et (A_1) deux systèmes correspondants : si toutes les forces Q_i sont nulles dans (A), *elles sont nulles aussi dans* (A_1); en effet, les trajectoires de (A) ne dépendant que de ($2k-2$) paramètres, il en est de même des trajectoires de (A_1), et, d'après un théorème du premier Chapitre, toutes les forces dans (A_1) doivent être nulles.

Nous allons donc étudier en premier lieu la correspondance entre deux systèmes (A) et (A_1) *sans forces*. Le théorème fondamental que nous démontrerons est le suivant :

Si un système (A) *sans forces, soit* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$, *possède un correspondant* (A_1), *distinct des correspondants ordinaires* $\left[C\frac{ds^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right]$, *il admet une intégrale quadratique* (*en outre de celle des forces vives*).

Ce qui peut s'énoncer encore :

Si les géodésiques de deux ds^2 (*non semblables*) *coïncident, elles admettent une intégrale rationnelle et du second degré.*

Deux tels ds^2 seront dits *correspondants*.

Si k est égal à 2, ce théorème se confond avec celui de M. Dini.

2. Pour démontrer cette proposition je m'appuierai sur le lemme suivant :

Soit un système d'équations

$$(1) \qquad \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dq} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où f est une fonction quelconque de $q, q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, \ldots, q'_k$, assujettie à la seule condition que le système (1) *soit résoluble par rapport aux* $\frac{d^2 q_i}{dq^2}$, *autrement dit que le hessien d de f relatif aux variables q'_i, à savoir*

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q_1'^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2'^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_2 \partial q'_k} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_k} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_k'^2} \end{vmatrix},$$

ne soit pas identiquement nul : ce hessien est un dernier multiplicateur de (2).

En effet, ramenons le système (1) à la forme canonique à l'aide du changement de variables

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

d'où l'on tire inversement

$$q'_i = \frac{\partial f_1}{\partial p_i},$$

en posant

$$f_1(q, q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k) \equiv p_1 q'_1 + \ldots + p_k q'_k - f.$$

Les nouvelles équations admettent comme multiplicateur l'unité. Autrement dit, si l'on connaît $(2k-1)$ intégrales premières du système (1), soit

$$(2) \quad \varphi_j(q, q_1, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k) = c_j \quad [j = 1, 2, \ldots (2k-1)],$$

quand on tire de ces intégrales $p_1, p_2, \ldots, p_k, q, q_1, q_2, \ldots, q_{k-2}$ en fonction de q_{k-1} et de q_k par exemple, l'expression

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_k} dq_{k-1} - \frac{\partial f_1}{\partial p_{k-1}} dq_k\right) \equiv \frac{1}{\delta}(q'_k dq_{k-1} - q'_{k-1} dq_k)$$

est une différentielle totale exacte; δ désigne le déterminant fonctionnel $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k-1})}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, p_1, p_2, \ldots, p_k)}$; mais, d'autre part, si l'on suppose que les intégrales φ_j soient exprimées à l'aide des q'_i, on a

$$\delta_1 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k-1})}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)}$$
$$= \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k-1})}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, p_1, \ldots, p_k)} \frac{D(q, q_1, \ldots q_{k-2}, p_1, \ldots, p_k)}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, q'_1, \ldots q'_k)} = \delta \frac{D(p_1, p_2, \ldots, p_k)}{D(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)} \equiv \delta \times d.$$

Donc l'expression

$$\frac{d}{\delta_1}(q'_k \, dq_{k-1} - q'_{k-1} \, dq_k)$$

est une différentielle exacte [si l'on tient compte des $2k-1$ relations (2)]; le hessien d est un multiplicateur de (1).

Si notamment q ne figure pas dans f, d est un multiplicateur du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{d\frac{\partial f}{\partial q'_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{d\frac{\partial f}{\partial q'_k}}{\frac{\partial f}{\partial q_k}}.$$

Appliquons ce lemme à un système (A) sans forces,

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

en faisant $q = t$. On voit que le discriminant Δ de T est un multiplicateur du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_1}}{\frac{\partial T}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{\frac{\partial T}{\partial q'_k}}{\frac{\partial T}{\partial q_k}}.$$

Admettons donc qu'on connaisse $(2k-3)$ intégrales premières des *géodésiques*, c'est-à-dire $(2k-3)$ intégrales de (A) homogènes et de degré zéro par rapport aux q'_i, soit (en posant $q'_{(2)} = \frac{q'_2}{q'_1} = \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots,$

$q_{(k)} = \frac{q'_k}{q'_1} = \frac{dq_k}{dq_1}\Big)$:

$$(3)\quad \psi_j[q_1, q_2, \ldots q_k, q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}] = c_j \quad [j = 1, 2, \ldots (2k-3)].$$

A ces intégrales joignons celles des forces vives

$$(1)\qquad \mathrm{T} \equiv q_1'^2 \tau[q_1, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}] = h.$$

Si de (3) on tire $q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$ en fonction de q_1, q_2, l'expression

$$(4)\qquad \frac{\Delta q'_1}{\delta_1}[dq_2 - q'_{(2)} dq_1],$$

où l'on remplace q'_1 par sa valeur tirée de (4), est une différentielle exacte. Ici on a

$$\delta_1 = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{T}, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{\mathrm{D}(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)}$$
$$= \frac{\mathrm{D}(q_1'^2\tau, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{\mathrm{D}[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]}\, \frac{\mathrm{D}[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]}{\mathrm{D}(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)}.$$

Mais en observant que $q'_{(i)} = \frac{q'_i}{q'_1}$, on trouve aussitôt

$$\frac{\mathrm{D}[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]}{\mathrm{D}(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)} = \frac{\mathrm{D}[q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}]}{\mathrm{D}(q'_2, q'_3, \ldots, q'_k)} = \frac{1}{q_1'^{k-1}};$$

d'autre part, comme $\tau, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3}$ ne dépendent pas de q'_1, mais seulement des $q'_{(i)}$, il vient

$$\frac{\mathrm{D}(q_1'^2\tau, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{\mathrm{D}[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]} = 2\tau q'_1 \frac{\mathrm{D}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{\mathrm{D}[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]}$$
$$= 2\tau q'_1 \delta';$$

et, par suite,

$$\delta_1 = \frac{2\tau\delta'}{q_1'^{k-2}}.$$

Remplaçons δ_1 par cette valeur dans l'expression (4) et faisons

$q'_1 = \frac{h}{\sqrt{\tau}}$; on voit en définitive que *l'expression*

$$\frac{1}{\delta'} \frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}} [dq_2 - q'_{(2)} dq_1]$$

est une différentielle exacte quand on y remplace $q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$ *en* q_1, q_2 *d'après* (3); δ' désigne le déterminant fonctionnel des ψ_j, par rapport aux variables $q_3, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$.

Ceci revient à dire que si l'on écrit ainsi les équations différentielles des géodésiques

$$(5) \qquad dq_1 = \frac{dq_2}{q'_{(2)}} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_{(k)}} = \frac{dq'_{(2)}}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dq'_{(k)}}{\lambda_k},$$

ces équations admettent comme dernier multiplicateur l'expression

$$\frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}.$$

La démonstration du théorème que j'ai en vue est dès lors achevée. Supposons, en effet, que (A) et (A_1) soient deux systèmes (sans forces) correspondants, autrement dit que les géodésiques de (A) et de (A_1) coïncident; les équations (5) seront les mêmes pour les deux systèmes, et elles admettront à la fois les deux multiplicateurs

$$\frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}, \qquad \frac{\Delta_1}{\tau_1^{\frac{1+k}{2}}}.$$

Le quotient $\frac{\Delta}{\Delta_1} \frac{\tau_1^{\frac{1+k}{2}}}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$ *est donc une intégrale première de* (5), et comme cette intégrale peut s'écrire

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{\tau_1}{\tau} = \text{const.},$$

on voit que les géodésiques admettent une intégrale rationnelle du second degré. Quant au système (A) lui-même, si l'on tient compte

de l'intégrale des forces vives $T \equiv q_1'^2 \tau = h$, on trouve *qu'il possède une intégrale quadratique*

$$(6) \qquad \left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} ds_1^2 = C\,dt^2.$$

Cette intégrale peut-elle se confondre avec celle des forces vives? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} ds_1^2 \equiv C\,ds^2$; cela exige d'abord que ds_1^2 soit égal à $\mu\,ds^2$, de plus $\left(\text{comme } \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ est égal à } \mu^k\right)$ que $\mu^{-\frac{2k}{1+k}}$, et, par suite μ, soit une constante. Si donc (A_1) n'est pas un correspondant *ordinaire* de (A), l'intégrale (6) est toujours distincte de celle des forces vives. Le théorème que j'ai énoncé est donc complètement démontré. Observons que le raisonnement précédent nous montre que *ds^2 et $\mu\,ds^2$ ne peuvent être correspondants sans que μ soit une constante;* autrement, $\mu' =$ const. serait une intégrale première des géodésiques.

De même (A_1) possède l'intégrale

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{2}{1+k}} ds^2 = C_1\,dt_1^2.$$

3. Avant d'aller plus loin, j'insisterai sur un des résultats obtenus tout à l'heure. Nous avons dit que les équations différentielles (5) des géodésiques admettaient comme multiplicateur l'expression $\frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$. Or on connaît une forme explicite de ces équations, à savoir la suivante :

$$(1)' \qquad dq_1 = \frac{dq_2}{q'_{(2)}} = \cdots = \frac{dq_k}{q'_{(k)}} = \frac{d.\dfrac{\partial f}{\partial q'_{(2)}}}{\dfrac{df}{\partial q_2}} = \cdots = \frac{d.\dfrac{\partial f}{\partial q'_{(k)}}}{\dfrac{df}{\partial q_k}},$$

où f est égal à $\sqrt{\tau}$. Inversement, tout système $(1)'$, où f est la racine carrée d'un polynome du second degré τ en $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$, peut être regardé comme définissant les trajectoires d'un système (A) sans forces,

à savoir du système où

$$T = q_1'^2 f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{q_2'}{q_1'}, \ldots, \frac{q_k'}{q_1'}\right).$$

Nous arrivons donc à ce théorème : *Tout système* $(1)'$, *où* f *est la racine carrée d'un polynome* τ *du second degré en* $q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$, *admet comme dernier multiplicateur* $\dfrac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$, Δ désignant le discriminant de $\frac{1}{2}\tau$ rendu homogène.

J'indique rapidement une autre démonstration de ce théorème, qui consiste à généraliser la solution qu'a donnée M. Darboux du problème de Dini. D'après le lemme que j'ai établi antérieurement, le hessien d de f relatif aux variables $q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$ est un multiplicateur de $(1)'$. Comme $f = \sqrt{\tau}$, on a ici

$$d = \frac{1}{\tau^{\frac{3(k-1)}{2}}}\begin{vmatrix} \left[\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(2)}} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\right)^2\right] & \cdots & \left(\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right) \\ \left(\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(3)}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(3)}}\right) & \cdots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots \\ \left(\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right) & \cdots & \left[\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(k)}} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right)^2\right] \end{vmatrix} = \frac{1}{\tau^{\frac{3(k-1)}{2}}} d_1,$$

d_1 étant un polynome de degré $2(k-1)$ au plus par rapport aux q'_i. Pour $k=2$, on trouve immédiatement $d_1 = \tau\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(2)}} - \left(\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\right)^2 = \Delta$; pour $k=3$, $d_1 = \Delta\tau$; d'une manière générale, une transformation de déterminants assez pénible montre que $d_1 = \Delta\tau^{(k-2)}$: il suit de là que $\dfrac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$ est un multiplicateur de $(1)'$.

Inversement, comme nous avons établi, par notre première méthode, que $\dfrac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$ est un multiplicateur de $(1)'$; on en conclut que $d_1 = \Delta\tau^{k-2}$.

Tout d'abord, la fraction

$$D = \frac{d\times\tau^{\frac{1+k}{2}}}{\Delta} = \frac{d_1}{\Delta\tau^{k-2}},$$

dont les deux termes sont des polynomes par rapport aux $q'_{(i)}$ et aux coefficients A_{ij} de τ, est une constante absolue C (indépendante des q'_i et des A_{ij}) : autrement, elle définirait une intégrale première de (1)', et les géodésiques d'un ds^2 quelconque à k variables admettraient une intégrale algébrique et rationnelle par rapport aux $q'_{(i)}$, ce qui est évidemment absurde ([1]); donc $d_1 = C\Delta\tau^{k-2}$. En prenant un ds^2 particulier, soit $ds^2 = dq_1^2 + dq_2^2 + \ldots + dq_k^2$, on voit aussitôt que $C = 1$.

4. J'ajoute que les résultats précédents sont susceptibles d'être étendus aux équations les plus générales provenant *du calcul des variations*. Si deux systèmes (1)', *où f est quelconque*, définissent les mêmes relations entre les q_i, le rapport des hessiens d et d' de f et de f' (relatifs aux variables $q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$) est une intégrale première de (1)'.

En particulier, quand f et f' sont rationnelles (ou algébriques) en $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$, les équations (1)' admettent une intégrale première rationnelle (ou algébrique) par rapport avec $q'_{(i)}$.

Si f est la racine $n^{ième}$ d'un polynome τ du $n^{ième}$ degré en $q'_{(2)}$, $q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$, on a

$$= \frac{1}{\tau^{(k-1)\left(2-\frac{1}{n}\right)}} d_1$$

$$= \frac{1}{\tau^{(k-1)\left(2-\frac{1}{n}\right)}} \begin{vmatrix} \frac{1}{n}\left[\tau \frac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(2)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\right)^2\right] & \cdots & \frac{1}{n}\left[\tau \frac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right] \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{n}\left[\tau \frac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right] & \cdots & \frac{1}{n}\left[\tau \frac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(k)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right)^2\right] \end{vmatrix},$$

et en appelant Δ le hessien de la forme homogène :

$$T = \frac{1}{n(n-1)} q_1'^n \tau\left(q_1, q_2, \ldots, q_k \frac{q'_2}{q'_1}, \frac{q'_3}{q'_1}, \ldots, \frac{q'_k}{q'_1}\right),$$

on trouve

$$d_1 = (n-1)^{k-1}\Delta'\tau^{k-2};$$

([1]) Il serait, d'ailleurs, bien facile de démontrer ce dernier point en toute rigueur.

Δ' représente ce que devient Δ quand on y fait $q'_1 = 1$, $q'_i = q_{(i)}$. Il suit de là que $\dfrac{\Delta'}{\tau^{\frac{k(n-1)+1}{n}}} \equiv d$ est un multiplicateur de (1)'.

Pour démontrer ces dernières propositions, on pourra suivre la même marche que dans le cas où T est du second degré. En se servant des équations

$$(1)'' \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

qui définissent entre les q_i les mêmes relations que (1)', on établira, sans rien changer au raisonnement, d'abord que $\dfrac{\Delta'}{\tau^{\frac{k(n-1)+1}{n}}}$ est un multiplicateur de (1)', ensuite qu'il doit coïncider avec d; d'où la valeur de d_1.

Si, en particulier, deux systèmes tels que (1''), où T et T_1 sont de même degré n, se correspondent, soit $T = \dfrac{ds^n}{dt^n}$, $T_1 = \dfrac{ds_1^n}{dt_1^n}$: l'égalité

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right) ds_1^{k(n-1)+1} = C\, dt^{k(n-1)+1}$$

fournit une intégrale première de (1)'' [1].

II. — Passage d'un système (A) sans forces a son correspondant. Conséquences.

5. Quand dans un système (A) tous les coefficients Q_i sont nuls, l'égalité

$$dt = C\, ds$$

---

[1] Si T et T_1 sont de degré n et n_1, l'égalité est de la forme

$$q_i^{(n-n_1)} \frac{\Delta}{\Delta_1} \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^{k(n_1-1)+1} = C,$$

i ayant une quelconque des valeurs 1, 2, ..., k; on a donc nécessairement : $q'_i = c_i q'_1$, c'est-à-dire $q_i = c_i q_1 + c'_i$, les c, c' étant des constantes, et la même conclusion s'applique aux trajectoires du second système. Ce cas particulier écarté, les deux systèmes ne peuvent être correspondants sans que n soit égal à n_1.

où C désigne soit un nombre, soit une intégrale première des géodésiques, définit sur chaque géodésique un mouvement de (A). Inversement, toute égalité

$$dt = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right) ds$$

qui définit sur une géodésique quelconque un mouvement de (A), est de la forme précédente.

Appliquons cette remarque à deux systèmes correspondants (A) et (A_1) sans forces. Nous aurons

$$dt = C\,ds, \qquad dt_1 = C_1\,ds_1,$$

d'où

$$(a) \qquad \frac{dt}{dt_1} = c\,\frac{ds}{ds_1},$$

$c \equiv \frac{C}{C_1}$ représentant un nombre ou une intégrale première des géodésiques. D'un mouvement quelconque défini par (A) on déduira donc un mouvement défini par (A_1) en changeant dt en dt_1 d'après (a); d'ailleurs, toute égalité

$$\frac{dt}{dt_1} = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right)$$

qui transforme les mouvements de (A) et de (A_1) l'un dans l'autre, est une transformation (a).

Mais nous avons vu plus haut que l'expression

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{1}{k+1}} \frac{ds_1}{ds}$$

est une intégrale première des géodésiques; si l'on remplace C par cette expression dans (a), il vient

$$(b) \qquad \frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{k+1}}}.$$

Nous arrivons ainsi à cette conclusion : *On peut passer du système* (A) *au système* (A_1) *par la transformation* (b). *Cette transforma-*

tion n'est pas la seule; la plus générale s'obtient en posant

$$\frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{k+1}}} = \mathrm{C}\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{k+1}}},$$

C représentant une constante ou une intégrale première des géodésiques.

Cette proposition joue un rôle fondamental dans la théorie des correspondants. Nous allons en déduire immédiatement quelques conséquences.

6. Une des plus importantes est la suivante :

Soit deux systèmes (A) *et* (A_1)

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = \mathrm{Q}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

et

$$(\mathrm{A}_1) \quad \frac{d}{dt_1}\left[\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial (q'_i)}\right] - \frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial q_i} = \mathrm{Q}'_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = (q'_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si les géodésiques de T *et de* T_1 *coïncident, à tout système de forces* Q_i *de* (A) *on peut associer un système de forces* Q'_i *telles que* (A) *et* (A_1) *soient correspondants* (¹).

En effet, supposons les équations (A) résolues par rapport aux $\frac{d^2 q_i}{dt^2}$. Nous aurons

$$(a) \qquad \frac{d^2 q_i}{dt^2} = \mathrm{P}_i + \frac{\alpha_i}{\Delta} = \mathrm{P}_i + \beta_i,$$

P_i désignant une forme quadratique des q'_i qui ne dépend que de T, et β_i dépendant des forces Q_i et des coefficients A_{ij} de T. On aurait de même pour (A_1)

$$(a_1) \qquad \frac{d^2 q_i}{dt_1^2} = \mathrm{P}'_i + \frac{\alpha'_i}{\Delta_1} = \mathrm{P}'_i + \beta'_i.$$

(¹) On pourrait aussi démontrer ce théorème en se servant des équations différentielles des trajectoires.

Nous savons que quand toutes les forces sont nulles, et par suite les α_i, α'_i, on peut passer de (a) à (a_1) par le changement de variable

$$\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}},$$

C étant une constante, ce qui peut s'écrire

$$dt_1 = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)\,dt.$$

Si nous effectuons ce changement de variables, il vient

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{dt_1}\frac{dt_1}{dt} = \lambda\frac{dq_i}{dt}, \qquad \frac{d^2q_i}{dt^2} = \lambda^2\frac{d^2q_i}{dt_1^2} + \frac{dq_i}{dt_1}\lambda\frac{d\lambda}{dt_1};$$

les équations (a) deviennent

$$(b) \qquad \frac{d^2q_i}{dt_1^2} = (\mathrm{P}_i) - \frac{dq_i}{dt_1}\frac{d}{dt}\log\lambda + \frac{\beta_i}{\lambda^2},$$

(P_i) représentant P_i où l'on a remplacé $\frac{dq_i}{dt}$ par $\frac{dq_i}{dt_1}$. Puisque les équations (b) et (a_1) coïncident quand les β_i, β'_i sont nuls, on a

$$(\mathrm{P}_i) - \frac{dq_i}{dt_1}\left(\frac{dq_1}{dt_1}\frac{\partial\log\lambda}{\partial q_1} + \ldots + \frac{dq_k}{dt_1}\frac{\partial\log\lambda}{\partial q_k}\right) \equiv \mathrm{P}'_i.$$

Pour qu'elles coïncident encore quand les β_i, β'_i ne sont pas nuls, il faut donc et il suffit que

$$\frac{\beta_i}{\lambda^2} = \beta'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

ce qui peut s'écrire encore

$$\beta_i\Delta^{\frac{2}{k+1}} = C^2\beta'_i\Delta_1^{\frac{2}{k+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

le théorème est ainsi démontré.

Il est facile de déduire de ces relations les relations explicites qui définissent les Q'_i en fonction des Q_i.

Représentons par Δ^{ij} (ou Δ_1^{ij}) le mineur de Δ (ou de Δ_1) relatif à l'élément A_{ij} (ou A'_{ij}); on a

$$\beta_i = \frac{\Delta^{1i}}{\Delta}\mathrm{Q}_1 + \frac{\Delta^{2i}}{\Delta}\mathrm{Q}_2 + \ldots + \frac{\Delta^{ki}}{\Delta}\mathrm{Q}_k,$$

et, par suite (comme on sait),

$$Q_i = A_{1i}\beta_1 + A_{2i}\beta_2 + \ldots + A_{ki}\beta_k.$$

Écrivons donc les égalités

$$Q'_i = \sum_{j=1}^{j=k} A'_{ij}\beta'_j, \qquad \beta'_j = C^2\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{-\frac{2}{k+1}}\beta_j, \qquad \beta_j = \frac{1}{\Delta}\sum_{l=1}^{l=k} \Delta^{lj} Q_l;$$

il vient

$$(c) \qquad \Delta_1^{\frac{2}{k+1}} Q'_i = \frac{C^2}{\Delta^{\frac{k-1}{k+1}}}(\mu_{i1}Q_1 + \mu_{i2}Q_2 + \ldots + \mu_{ik}Q_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

où μ_{ij} désigne le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la $j^{\text{ième}}$ colonne par la $i^{\text{ième}}$ colonne de Δ_1 (ici μ_{ij} est en général distinct de μ_{ji}).

7. *Remarques.* — Ce théorème peut être complété par plusieurs remarques. En faisant varier la constante C^2, nous obtenons, ainsi qu'il était évident à l'avance, une infinité de systèmes Q'_i qui se déduisent tous de l'un d'entre eux en multipliant les Q' par un facteur constant. Mais il importe d'observer que, les Q_i étant donnés, ces forces Q'_i sont les seules pour lesquelles (A) et (A_1) soient correspondants. En effet, les Q_i étant donnés, les trajectoires de (A), par suite celles de (A_1) sont déterminées; or nous avons vu, dans le premier Chapitre, qu'on ne peut, dans un système (A_1), changer les forces Q'_i sans changer les trajectoires, à moins que les nouvelles forces (Q'_i) ne diffèrent des premières que par le même facteur constant.

De plus, dans le cas actuel, on passe du système (A) au système (A_1) [où les Q'_i satisfont aux conditions (c)], par la transformation

$$(d) \qquad \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}},$$

C désignant un nombre bien déterminé quand les Q_i, Q'_i sont donnés. Il importe, là encore, d'observer que cette transformation est *unique*;

autrement dit qu'il n'existe pas d'autre changement de variable

$$(e)\qquad \frac{dt_1}{dt} = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right)$$

qui transforme l'un dans l'autre les systèmes (A) et (A_1) donnés. La chose est évidente, si l'on se rappelle l'égalité établie dans le premier Chapitre (*voir* p. 29), égalité qui résulte de (A) :

$$\frac{dt^2}{dq_1^2}\left(\frac{\alpha_2}{\Delta} - \frac{\alpha_1}{\Delta}\frac{dq_2}{dq_1}\right) = \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2.$$

Si l'on écrit l'égalité analogue relative à (A_1), et si l'on égale les deux valeurs de $\frac{d^2 q_2}{dq_1^2}$ [qui coïncident puisque (A) et (A_1) sont correspondants], on trouve que dt et dt_1 sont liés par une relation de la forme (e) (1)

$$\frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\varphi\left(q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right)}.$$

C'est ce que nous voulions établir. Le rapport $\frac{dt_1}{dt}$ est donc parfaitement déterminé en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$; et l'égalité précédente doit coïncider avec (d).

Ces remarques permettent d'énoncer les corollaires suivants :

Soit deux systèmes correspondants donnés (A) *et* (A_1), *où les forces ne sont pas nulles : si les géodésiques de* T *et de* T_1 *coïncident, on peut passer de* (A) *à* (A_1) *par la transformation unique*

$$(d)\qquad \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}},$$

où C *est un nombre déterminé.*

Les forces Q'_i sont alors liées aux forces Q_i par les conditions (c).

Inversement, *si l'on peut passer d'un système* (A) *donné à un*

---

(1) *Voir*, à ce sujet, le début du troisième Chapitre.

correspondant (A_1) *par une transformation*

$$dt_1 = \lambda(q_1, \ldots, q_k)\,dt,$$

les géodésiques de T *et de* T_1 *coïncident, et l'on a*

$$\lambda = C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{1+k}}.$$

En effet, reportons-nous au calcul développé dans le n° **6**. Par hypothèse, les équations (b) et (a_1) coïncident pour les Q_i, Q'_i donnés, donc pour les β_i, β'_i donnés; ceci ne peut avoir lieu que si, dans les seconds membres de (b) et de (a_1), les termes homogènes et du second degré par rapport aux $\frac{dq_i}{dq_1}$ et les termes indépendants de ces variables sont identiques respectivement. Mais, en identifiant les termes du second degré, on forme précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour que les géodésiques de T et de T_1 coïncident. D'autre part, puisque les géodésiques coïncident, λ est nécessairement de la forme indiquée. De plus, (A) admet un correspondant de force vive T_1 non seulement pour les forces Q_i données, *mais pour des forces quelconques.*

8. Démontrons enfin cette réciproque de la première proposition :

Si, ds^2 et ds_1^2 étant donnés, à des forces quelconques Q_i on peut associer des forces Q'_i telles que les deux systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ soient correspondants, les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 coïncident.

En effet, nous savons que les géodésiques de ds_1^2 font partie des trajectoires de (A_1) quels que soient les Q'_i, donc elles font partie des trajectoires de (A) quels que soient les Q_i.

Or pour un système (A) il n'existe pas, en dehors des géodésiques de ds^2, de faisceau de trajectoires à $(2k-2)$ paramètres, indépendant des forces Q_i. Les géodésiques de ds^2 se confondent donc avec celles de ds_1^2.

Mais on peut aller plus loin : quand deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et

$\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_i'\right]$ sont correspondants, il en est de même des deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, cQ_i\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, c'Q_i'\right]$, c et c' désignant deux constantes. Mais admettons que les systèmes (A) et (A_1) soient encore correspondants quand on y remplace les Q_i par certaines forces *distinctes* des premières, soit (Q_i), et les Q_i' par (Q_i') (¹). Les géodésiques de ds_1^2 appartiennent aux trajectoires des deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, (Q_i)\right]$; mais nous avons montré dans le premier Chapitre que, pour $k > 2$, il n'existe pas, en dehors des géodésiques de ds^2, un faisceau de trajectoires, à $(2k-2)$ paramètres, commun à deux tels systèmes. Nous arrivons donc à cette conclusion :

Si deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *et* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_i'\right]$ *correspondants restent correspondants quand on y remplace les forces* Q_i *et* Q_i' *par certaines forces* (Q_i) *et* (Q_i') *distinctes des premières, les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident.* Par suite, toutes les propositions précédentes s'appliquent à la correspondance en question.

La dernière démonstration suppose, il est vrai, $k > 2$, car pour $k = 2$, le lemme sur lequel elle s'appuie est en défaut.

Nous reviendrons sur ce point dans le troisième Chapitre, où nous retrouverons par une autre voie tous les résultats que nous venons d'obtenir.

III. — Conditions suffisantes pour qu'un système (A) sans forces admette un correspondant. Remarque sur les systèmes (A) où les forces dérivent d'un potentiel.

9. Nous venons de voir que si un système (A), sans forces, possède un correspondant (non ordinaire), il admet nécessairement une

(¹) Si les systèmes de forces Q_i et (Q_i) sont *distincts*, les systèmes Q_i' et (Q_i') le sont aussi, car autrement les trajectoires de (A_1), par suite celles de (A), ne seraient pas modifiées par le changement de forces, et l'on aurait

$$(Q_i) = cQ_i.$$

intégrale quadratique distincte de celle des forces vives. *Pour $k=2$, cette condition est suffisante*, ainsi qu'il est bien connu, et de toute intégrale quadratique on déduit un correspondant (A_1) de (A).

Pour $k>2$, il est aisé de former des systèmes qui possèdent des correspondants et n'admettent, en dehors de l'intégrale des forces vives, *qu'une seule intégrale quadratique*. Par exemple, le ds^2

$$ds^2 = \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + dq_3^2,$$

où φ est quelconque, est correspondant du ds_1^2,

$$ds_1^2 = \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + C\,dq_3^2,$$

où C est un nombre; d'autre part, le système (A) ou $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ n'admet qu'une intégrale quadratique

$$\varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + C\,dq_3^2 = c\,dt^2,$$

intégrale qui peut s'écrire notamment

$$dq_3 = c\,dt.$$

Mais, en général, *la condition qu'il existe une intégrale quadratique ne suffit pas pour que (A) admette un correspondant.* On s'en assure aisément en considérant, par exemple, le ds^2 rencontré par Jacobi dans la théorie des coordonnées elliptiques

$$ds^2 = \left[\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\psi_i(q_i)}{F'(q_i)}\right] \sum_{i=1}^{i=k} \frac{F'(q_i)}{f(q_i)}\,dq_i^2,$$

où l'on a posé

$$F = (u-q_1)(u-q_2)\ldots(u-q_k),$$
$$f = (u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_k),$$

et où ψ_i désigne une fonction quelconque de q_i. Ce système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ admet un système complet d'intégrales quadratiques et ne possède pas de correspondants (en dehors des correspondants ordinaires).

Au sujet des conditions suffisantes pour qu'un système (A) admette des correspondants non ordinaires, je ferai les observations suivantes : Considérons un système de $(k-1)$ équations différentielles du second ordre en $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Pour qu'un tel système puisse être regardé comme définissant des géodésiques, il faut : 1° qu'il existe une fonction $f(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})$ telle que le système

$$(1) \qquad \frac{d}{dq_1}\frac{\partial f}{\partial q'_{(i)}} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

se confonde avec le système donné ; 2° que f soit la racine carrée d'un polynome φ du second degré en $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$. Pour que le ds^2 défini par φ admette des correspondants, il faut : 3° qu'il existe au moins deux telles fonctions $f = \sqrt{\varphi}$ et $f_1 = \sqrt{\varphi_1}$ distinctes.

La première condition est toujours remplie pour $k = 2$, mais pour $k > 2$ il n'en est plus ainsi. Ces conditions, d'ailleurs suffisantes, entraînent l'existence d'une intégrale quadratique du système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Comment former explicitement ces conditions suffisantes? Un des moyens les plus simples consiste à se servir du théorème établi plus haut :

Pour que les systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *et* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right]$ *soient correspondants, il faut et il suffit qu'on puisse passer d'un système à l'autre en changeant* dt *en* $\lambda(q_1, \ldots, q_k)\, dt_1$.

En exprimant qu'il en est ainsi on forme très élégamment les conditions suffisantes cherchées, conditions où interviennent évidemment les expressions $a_{ij} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \Lambda_{ij}}$, et que j'étudierai dans un autre travail [1].

J'ajoute seulement qu'il est facile de former des ds^2 qui possèdent des correspondants : si notamment on connaît *une transformation en elles-mêmes des géodésiques de* ds^2, cette transformation engendre un *correspondant* ds_1^2 de ds^2 qui est en même temps un de ses *homo-*

[1] *Voir* à ce sujet la Note déjà citée de M. R. Liouville (*Comptes rendus*, mai 1892).

logues. C'est ainsi que les ds^2 de la forme $\sum_{i=1}^{i=k} dq_i^2$ admettent une infinité de correspondants ds_1^2, qu'on en déduit à l'aide de la transformation homographique à k variables la plus générale.

Quand on a formé un tel ds^2, tout système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ admet des correspondants de la forme $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$. Observons qu'il existe des systèmes (A) possédant des correspondants non ordinaires, et qui n'admettent *aucune intégrale quadratique;* c'est le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ qui admet nécessairement une telle intégrale (en outre de celle des forces vives). On le voit sur les correspondants

$$(\mathrm{A}) \quad ds^2 = \varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + dq_3^2 \qquad (Q_1, Q_2, Q_3),$$

et

$$(\mathrm{A}_1) \quad ds^2 = \varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + C dq_3^2, \quad (Q_1, Q_2, CQ_3) \quad (C \neq 1),$$

où Q_1, Q_2, Q_3 sont pris arbitrairement, correspondants qui définissent non seulement les mêmes trajectoires, mais le même mouvement : car on a ici

$$\frac{dt_1}{dt} = 1.$$

Observons encore que, *si les forces Q_i dérivent d'un potentiel* U, *il n'en est pas de même en général des Q'_i*, comme le montre le même exemple, où l'on fait $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$, U étant une fonction *quelconque* des q_i. Toutefois, cette dernière circonstance *peut* se présenter, ainsi qu'on le voit, en prenant pour U une fonction de la forme

$$U = \psi(q_1, q_2) + \chi(q_3).$$

Il convient de remarquer, sur ce dernier exemple, qu'un faisceau naturel de trajectoires $h = a$ de (A) ne coïncide *jamais* avec un faisceau naturel de trajectoires $h_1 = a_1$ de (A_1) (h et h_1 désignant les deux constantes des intégrales des forces vives); en effet, on aurait à

la fois pour un tel faisceau,

$$\varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + \quad dq_3^2 - \quad [\psi + \chi]\,dt^2 = a\,dt^2,$$

et

$$\varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + C\,dq_3^2 - [\psi + C\chi]\,dt^2 = a_1\,dt^2,$$

et ces deux conditions devraient se confondre, ce qui est impossible, de quelque façon qu'on choisisse a et a_1. Nous démontrerons plus loin que c'est là un fait général.

10. Je terminerai cette étude des systèmes où les forces sont nulles en rapprochant le problème traité dans ce Chapitre d'un problème qui concerne le cas où les forces Q_i de (A) ne sont pas nulles, mais dérivent d'un potentiel U. On sait que les trajectoires de (A), pour chaque valeur de la constante $h = T - U$, coïncident avec les géodésiques de $ds'^2 = (U + h)\,ds^2$. On peut se poser la question suivante :

Quelle que soit la constante h, à quelles conditions le système $\left[(U+h)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ admet-il un correspondant $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right]$ non ordinaire?

Il est clair que cette question rentre dans celle qui a été traitée dans ce Chapitre, et que toutes les propriétés démontrées sur les ds^2 correspondants s'appliqueront ici au couple $(U + h)\,ds^2$ et ds_1^2, ds_1^2 dépendant de h. Notamment *le système* $\left[(U+h)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *devra admettre une intégrale quadratique quel que soit h.* D'après un théorème que j'ai énoncé plus haut sans en donner la démonstration, il suit de là que le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ devra admettre aussi une intégrale quadratique.

Quelles relations existe-t-il entre ce problème et la recherche des correspondants du système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$? Tout d'abord, si, pour h choisi arbitrairement, les géodésiques de $ds'^2 = (U + h)\,ds^2$ et de ds_1^2 coïncident, tout système $\left[(U+h)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$, en particulier le système

$$\left[(U+h)\frac{ds^2}{dt^2}, \frac{1}{U+h}\right]$$

admet des correspondants de la forme $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$; le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ admet donc une infinité de correspondants *distincts* qui dépendent d'une constante arbitraire ([1]). *Dans un système* (A) *ou* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$, *l'expression* $ds'^2 = (U + h)ds^2$ *ne saurait admettre, pour h quelconque, de* ds_1^2 *correspondant, sans que* (A) *lui-même admette une infinité de correspondants distincts; mais la réciproque n'est pas vraie;* c'est ainsi que le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$, où

$$ds^2 \equiv \varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + dq_3^2$$

et où U est une fonction *quelconque* des q_i, possède une infinité de correspondants sans que $ds'^2 = (U + h)ds^2$ admette (pour aucune valeur de h) de ds^2 correspondant.

Mais peut-il arriver que *la recherche d'un correspondant du système* (A) *ou* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ *se confonde avec celle d'un correspondant* (*pour h quelconque*) *du système* $\left[(U + h)\frac{ds^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$? D'une façon précise, peut-il arriver qu'un correspondant $\left[\frac{ds_1'^2}{dt_1'^2}, Q_i = 0\right]$ du dernier système, où $ds_1'^2$ dépend de h, se rattache à un système $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$ de la même manière que $\left[\frac{ds'^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$ se rattache à (A)? Il faut pour cela et il suffit que $ds_1'^2$ soit de la forme $ds_1'^2 \equiv (U_1 + h_1)\,ds_1^2$, h_1 désignant une certaine fonction de h, U_1 et ds_1^2 n'en dépendant plus. Si l'on veut encore, il faut qu'il existe un correspondant $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$ de (A) tel que chaque faisceau $h = a$ de (A) coïncide avec un faisceau $h_1 = a_1$ de (A_1). Cette condition est remplie dans la transformation de M. Darboux, mais on a alors $ds_1'^2 = C\,ds'^2$. Dans le prochain Chapitre, je montrerai qu'elle n'est *jamais* remplie pour deux cor-

---

([1]) Quand, *pour une valeur déterminée de h*, il existe un correspondant ds_1^2 de $(U + h)ds^2$, le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ admet des correspondants (*non distincts*) de la forme $\left[C\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, cQ'_i\right]$, ds_1^2 ne dépendant plus d'une constante arbitraire.

respondants non ordinaires; autrement dit, que les faisceaux naturels ne se conservent jamais. *La recherche d'un correspondant de* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ *et celle d'un correspondant de* $\left[(U+h)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *sont donc toujours deux problèmes distincts.*

CHAPITRE III.

Systèmes correspondants où toutes les forces ne sont pas nulles.

I. — Démonstration d'une propriété générale de ces systèmes.

1. Soient (A) et (A_1) deux systèmes correspondants : si les forces Q_i de (A) ne sont pas toutes nulles, les forces Q'_i de (A_1) ne sont pas toutes nulles. Ceci rappelé, supposons que (A) admette un correspondant (A_1) distinct de ses correspondants ordinaires (¹); nous allons montrer que (A) jouit alors de plusieurs propriétés dont une des plus importantes s'énonce ainsi : *Un au moins des systèmes* (A) *et* (A_1), *où l'on annule les forces, possède une intégrale quadratique.*

Pour démontrer cette proposition, j'aurai recours au lemme suivant :

Si les systèmes (A) *et* (A_1), *où les forces ne sont pas toutes nulles, sont correspondants, on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables de la forme*

$$dt^2 = d\sigma^2 + \mu(q_1, q_2, \ldots, q_k)\, dt_1^2,$$

où $d\sigma^2$ *représente une forme quadratique en* $dq_1, \ldots, dq_k$ *dont les coefficients dépendent de* $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

(¹) Les correspondants *ordinaires* de (A) sont, nous le savons, les systèmes $\left(C\frac{ds^2}{dt_1^2}, cQ_i\right)$, et $\left[(\alpha U+\beta)\frac{ds^2}{dt_1^2}, \frac{\gamma U+\delta}{\alpha U+\beta}\right]$ (si les Q_i dérivent d'un potentiel U).

Tout d'abord, observons que, les Q_i n'étant pas tous nuls, la fonction $t(q_1)$ définie par (A) est déterminée le long de chaque trajectoire (à une constante d'addition près) par l'égalité

$$(1) \qquad \left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2 = \frac{q''_{(i)} + \Phi_1 q'_{(i)} - \Phi_i}{\beta_i - \beta_1 q'_{(i)}},$$

en posant $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\Delta}$, $q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1}$, $q''_{(i)} = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2}$ (*voir* le Chapitre I, p. 29). Le long de la même trajectoire, on a, d'après (A_1),

$$(2) \qquad \left(\frac{dt_1}{dq_1}\right)^2 = \frac{q''_{(i)} + \Phi'_1 q'_{(i)} - \Phi'_i}{\beta'_i - \beta'_1 q'_{(i)}}.$$

Si l'on élimine $\frac{d^2 q_i}{dq_1^2}$ entre (1) et (2), on obtient une relation de la forme

$$\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = f(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) \qquad \left(q'_i = \frac{dq_i}{dt}\right).$$

Cette relation, d'ailleurs, est *unique;* car admettons qu'il existe une autre transformation

$$\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = f'(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)$$

qui permette de passer de (A_1) à (A); à des valeurs initiales *arbitraires* des q_i, q'_i correspond une trajectoire le long de laquelle $\left(\frac{dt_1}{dq_1}\right)^2$, $\left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2$, par suite $\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2$ sont des fonctions bien déterminées de q_1: donc f et f' coïncident pour les valeurs initiales des q_i, q'_i, et, comme ces valeurs sont arbitraires, f et f' sont identiques.

Ceci posé, formons explicitement cette relation d'après (1) et (2): il vient

$$(3) \qquad \left(\frac{dt_1}{dt^2}\right)^2 = \frac{-q_1'^2[q'_i(\Phi_1 - \Phi'_1) - (\Phi_i - \Phi'_i)] + (\beta_i - \beta_1 q'_{(i)})}{\beta'_i - \beta'_1 q'_{(i)}},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & dt^2(\beta_i\, dq_1 - \beta_1\, dq_i) - dt_1^2(\beta'_i\, dq_1 - \beta'_1\, dq_i) \\ & \quad = (H_1 - H'_1)\, dq_i - (H_i - H'_i)\, dq_1, \end{aligned} \right.$$

les H, H' désignant des formes quadratiques en $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k$.

Comme la relation (3) est *unique*, elle doit rester la même quand on donne à l'indice i les valeurs successives 2, 3, ..., k. Or le numérateur du second membre est un polynome en $q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$; le dénominateur ne renferme que $q'_{(i)}$. Pour que cette fonction ne change pas, quand on fait $i = 2, 3, \ldots, k$, il faut donc que son dénominateur $(\beta'_i - \beta'_1 q'_{(i)})$ divise son numérateur, et, par suite, divise séparément les deux parties,

$$[q'_{(i)}(\Phi_1 - \Phi'_1) - (\Phi_i - \Phi'_i)] \quad \text{et} \quad \beta_i - \beta_1 q'_{(i)}.$$

On a donc, en conséquence,

$$\frac{\beta'_1}{\beta_1} = \frac{\beta'_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\beta'_k}{\beta_k},$$

et, d'autre part, une fois effectuée la division par $(\beta_i - \beta_1 q'_{(i)})$, la relation (3) prend la forme

$$(5) \qquad \beta'_1\, dt_1^2 - \beta_1\, dt^2 = d\sigma^2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration suppose toutefois $k > 2$. Pour $k = 2$, voici comment on peut procéder : écrivons l'équation différentielle des trajectoires

$$(6) \qquad \frac{d}{dq_1}\log\chi + 2\Phi_1 = \frac{d}{dq_1}\log\psi - \frac{2\beta_1\chi}{\psi},$$

en posant

$$\psi = \beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}, \qquad \chi = q''_{(2)} + \Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2.$$

Les forces n'étant pas nulles, un au moins des coefficients β_1, β_2 est différent de zéro, et nous pouvons toujours admettre que c'est β_1; autrement on permuterait q_1 et q_2. Dans ces conditions, l'équation (6) peut s'écrire

$$q'''_{(2)} + \frac{d}{dq_1}(\Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2)$$
$$= \chi\left[-2\Phi_1 + \frac{d}{dq_1}\log\beta_1 + \frac{-3q''_{(2)} - \Phi_1 q'_{(2)} + \Phi_2 + \dfrac{d}{dq_1}\left(\dfrac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\dfrac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}}\right],$$

ou encore

$$(7)\qquad q'''_{(2)} = \frac{-3q''^2_{(2)} - 4q''_{(2)}(\Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2) + V}{\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}} + W = S,$$

V et W représentant des polynomes, le premier en $q'_{(2)}$, le second en $q'_{(2)}$ et $q''_{(2)}$, dont les coefficients dépendent de q_1, q_2. La fraction qui figure dans le second membre de (7) est d'ailleurs irréductible; autrement dit $\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}\right)$ ne divise pas le numérateur, car il devrait pour cela diviser le coefficient de $q''^2_{(2)}$, qui est -3. Exprimons maintenant que l'équation (7) relative à (A_1), soit $q'''_{(2)} = S'$, coïncide avec la précédente ou que $S \equiv S'$. On trouve d'abord que β'_1 ne peut être nul, autrement S' serait un polynome par rapport aux dérivées. De plus, S' et S doivent devenir infinis pour la même valeur de $q'_{(2)}$, donc $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta'_2}{\beta'_1}$. Enfin, la différence

$$\frac{\pm 4q''_{(2)}[(\Phi_1 - \Phi'_1)q'_{(2)} - (\Phi_2 - \Phi'_2)] - (V - V')}{\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}} - (W - W')$$

doit être identiquement nulle; la fraction qui figure dans cette différence se réduit donc à un polynome (par rapport aux dérivées), c'est-à-dire que son numérateur est divisible par son dénominateur $\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}$, ce qui exige que le binome $\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}\right)$ divise à la fois $(V - V')$ et l'expression $[(\Phi_1 - \Phi'_1)q'_{(2)} - (\Phi_2 - \Phi'_2)]$. On a donc bien, même pour $k = 2$,

$$\frac{\beta'_1}{\beta_1} = \frac{\beta_2}{\beta'_2}, \qquad \text{et} \qquad \beta_1\, dt^2 - \beta'_1\, dt_1^2 = d\sigma^2.$$

2. Nous allons montrer maintenant que *l'expression*

$$\frac{\Delta}{\Delta_1}\,\frac{\beta'_i}{\beta_i}\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^{k+3}$$

est une intégrale première de (A).

Nous avons vu, en effet, dans le Chapitre II, que Δ est un multiplicateur du système (A),

$$(A) \qquad dt = \frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots;$$

autrement dit, quand on connaît $(2k-2)$ intégrales de (A) indépendantes de t, soit

$$\varphi_j(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) = C_j \qquad [j = 1, 2, \ldots, (k-2)],$$

si l'on en tire $q_3, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ en fonction de q_1, q_2, l'expression

$$\frac{\Delta}{\delta} q'_1 (dq_2 - q'_{(2)}\, dq_1)$$

est une différentielle totale exacte; δ représente le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{(2k-2)})}{D(q_3, q_4, \ldots, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)}$.

Effectuons un premier changement de variables en posant $q'_1 = q'_1$, $q'_2 = q'_{(2)} q'_1$, $\ldots$, $q'_k = q'_{(k)} q'_1$. Les fonctions φ_j deviennent des fonctions ψ_j de $q_1, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$, et l'on a

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-2})}{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})} \times \frac{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)} \\ &= \delta' \frac{D(q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}{D(q'_2, \ldots, q'_k)} = \frac{\delta'}{q_1'^{(k-1)}}.\end{aligned}$$

Faisons ensuite le changement de variable

$$q''_{(2)} + \Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2 = (\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}) \frac{1}{q_1'^2}.$$

Les fonctions ψ_j deviennent des fonctions ϖ_j de $q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, q''_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$; et l'on a

$$\begin{aligned}\delta' &= \frac{D(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{2k-2})}{D(q_3, \ldots, q_k, q''_{(2)}, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})} \times \frac{D(q_3, \ldots, q_k, q''_{(2)}, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}{D(q_3, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})} \\ &= \delta'' \times \frac{\partial q''_{(2)}}{\partial q'_1} = -\frac{2\delta''(\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)})}{q_1'^3}.\end{aligned}$$

En définitive, il vient

$$-\frac{1}{2}\delta = \frac{\delta''(\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)})}{q_1'^{k+2}}.$$

L'expression

$$\frac{\Delta q_1'^{k+3}}{[\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}]},$$

où q'_1 *est défini par l'égalité*

$$(8) \qquad q_1'^2 = \frac{\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}}{q_{(2)} + \Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2},$$

est donc un multiplicateur des équations différentielles (α) *des trajectoires*

$$(\alpha) \qquad dq_1 = \frac{dq_2}{q'_{(2)}} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{dq'_2}{q''_{(2)}} = \frac{dq''_{(2)}}{f_2} = \frac{dq'_{(3)}}{f_3} = \ldots = \frac{dq'_{(k)}}{f_k}.$$

Si (A) et (A_1) sont correspondants, les deux expressions

$$\frac{\Delta\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^{k+3}}{[\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}]} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_1\left(\frac{dq_1}{dt_1}\right)^{k+3}}{[\beta'_2 - \beta'_1 q'_{(2)}]}$$

seront deux multiplicateurs des mêmes équations (α).

Comme on a, d'autre part,

$$\frac{\beta'_1}{\beta_1} = \frac{\beta'_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\beta'_k}{\beta_k} = \mu,$$

l'égalité

$$(9) \qquad \frac{\Delta}{\Delta_1}\mu\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^{k+3} = \text{const.}$$

définira une intégrale première de (α); $\frac{dt_1}{dt}$ représente, dans (9), le rapport des quantités $\frac{dq_1}{dt}$ et $\frac{dq_1}{dt_1}$ exprimées en fonction de $q''_{(2)}, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$ (et des q_i). *L'égalité* (9), *où le même rapport est exprimé en fonction des* $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ (*et des* q_i) *définira donc une intégrale première de* (A).

Or nous avons

$$\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \frac{\frac{d\sigma^2}{dt^2}}{\beta'_1} + \frac{\beta_1}{\beta'_1};$$

l'intégrale première (9) de (A) sera donc

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left(\frac{\frac{d\sigma^2}{dt^2}}{\beta'_1}+\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)=\tau-V=\text{const.},$$

τ désignant une forme quadratique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ (dont les coefficients dépendent des q_i), et V une simple fonction des q_i.

Les résultats que nous venons d'obtenir se résument ainsi :

Quand deux systèmes (A) *et* (A_1) (*où les forces ne sont pas nulles*) *sont correspondants, les coefficients* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ et $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_k$ *sont nécessairement proportionnels, et l'on peut passer de* (A) *à* (A_1) *par une transformation unique de la forme*

$$\beta'_1\,dt_1^2-\beta_1\,dt^2=d\sigma^2;$$

l'égalité

$$(a)\qquad \left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left(\frac{d\sigma^2}{\beta'_1}+\frac{\beta_1\,dt^2}{\beta'_1}\right)=C\,dt^2$$

est une intégrale première de (A), *et l'égalité*

$$(a)'\qquad \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left(\frac{d\sigma^2}{\beta_1}+\frac{\beta'_1\,dt_1^2}{\beta_1}\right)=C'\,dt_1^2$$

une intégrale première de (A_1).

Observons toutefois que le raisonnement précédent montre seulement que le premier membre de (a) reste constant pour tout mouvement de (A); il n'est donc pas impossible *a priori* que le premier membre se réduise à une constante absolue [auquel cas l'égalité (a) ne représente plus une intégrale première de (A)], mais il ne saurait se réduire à une simple fonction des q_i sans être une constante; autrement, les équations (A) admettraient une intégrale première indépendante des vitesses. Si donc le premier membre de (a) n'est pas une constante, c'est une intégrale du second degré de (A). Ces remarques faites, énumérons les différents cas qui sont susceptibles de se présenter.

3. Hypothèse I. — *Le premier membre de* (a) *est une constante absolue.*

Dans ce cas, la relation entre dt et dt_1 est de la forme

$$\frac{dt_1}{dt} = C_0\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{1}{k+3}} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

C_0 étant un certain nombre. La correspondance est donc de l'espèce étudiée au Chapitre II, et toutes les propriétés démontrées dans la Section II de ce Chapitre s'appliquent; notamment, *les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident.*

Inversement, si le rapport $\frac{dt_1}{dt}$ est une fonction λ des q_i, le premier membre de (a) est une constante absolue, et λ a pour valeur

$$(b)\qquad C_0\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{1}{k+3}}.$$

De plus, comme on a dans ce cas

$$d\sigma \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dt_1^2}{dt^2} = \frac{\beta_1}{\beta'_1},$$

la valeur de λ^2 doit coïncider avec $\frac{\beta_1}{\beta'_1}$; ce qui donne aussitôt

$$\frac{\beta_1}{\beta'_1} = C_0^{\frac{2(k+3)}{k+1}}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

et, par suite,

$$\frac{dt_1}{dt} = C_0^{\frac{k+3}{k+1}}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Ces égalités concordent bien avec celles qu'on a obtenues au Chapitre II (*voir* p. 49).

Nous avons montré en effet que, si l'on peut passer de (A) à (A_1) par le changement de variable $\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, on a nécessai-

rement

$$(b')\qquad \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{k+1}}} \qquad \text{et} \qquad \beta_i \Delta^{\frac{2}{k+1}} = C^2 \beta'_i \Delta_1^{\frac{2}{k+1}},$$

égalités qui ne diffèrent pas des précédentes, quand on fait $C_0 = C^{\frac{k+1}{k+1}}$.

Dans le cas que nous étudions, l'égalité (a) ne fournit pas d'intégrale de (A); mais nous savons déjà que *le système* (A) *où l'on annule les forces* Q_i *possède une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.*

Hypothèse II. — *L'intégrale quadratique définie par* (a) *se confond avec celle des forces vives.* (Ce cas ne peut se présenter que si les Q_i dérivent d'un potentiel U.)

Dans ce cas, la relation entre dt et dt_1 est de la forme

$$dt_1^2 = C_0^2 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} [ds^2 - (U+a)\,dt^2] = \lambda^2 [ds^2 - (U+a)\,dt^2].$$

Introduisons la transformation de M. Darboux, et substituons à (A) le système correspondant (A'),

$$(A')\qquad \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial T'}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T'}{\partial q_i} = \frac{\partial U'}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt'} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$T' = \frac{(U+a)\,ds^2}{dt'^2} = \frac{ds'^2}{dt'^2}, \qquad U' = \frac{1}{U+a};$$

nous connaissons la relation entre dt et dt' (*voir* Chapitre I, Section IV, p. 36), à savoir

$$dt'^2 = (U+a)^2 [ds^2 - (U+a)\,dt^2].$$

Les systèmes (A') et (A_1) seront donc deux systèmes correspondants, *tels qu'on passe de l'un à l'autre par le changement de variables*

$$\frac{dt_1^2}{dt'^2} = \frac{\lambda^2}{(U+a)^2} = \mu^2(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Nous sommes ramené ainsi à la correspondance étudiée dans le Chapitre II; *les géodésiques de ds'^2 et de ds^2 coïncident.* Nous savons de plus que

$$\mu = C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta'}\right)^{\frac{1}{1+k}} = C\left[\frac{\Delta_1}{\Delta(U+a)^k}\right]^{\frac{1}{1+k}},$$

d'où une valeur plus simple de λ,

$$\lambda = \mu(U+a) = C\left[\frac{\Delta_1(U+a)}{\Delta}\right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

On voit de même que $\dfrac{-\beta_i\Delta^{\frac{2}{k+1}}}{(U+a)^{1+\frac{2}{k+1}}}$ est égal à $C^2\beta'_i\Delta_1^{-\frac{2}{k+1}}$, ce qui s'écrit encore

$$\frac{\beta_i}{\beta'_i} = -C^2\left[\frac{\Delta_1^2(U+a)^{k+3}}{\Delta^2}\right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

La première valeur de λ coïncide avec la seconde pour $C_0 = C^{\frac{k+1}{k+3}}$.

Nous avons admis que (A_1) n'était pas un correspondant *ordinaire* de (A); dans ces conditions, ds'^2 ne se confond pas avec $C\,ds_1^2$ (C étant un nombre); autrement, on aurait aussi $U' = cU_1$, c'est-à-dire à la fois

$$ds_1^2 = \frac{U+a}{C}\,ds^2, \qquad U_1 = \frac{1}{c(U+a)},$$

et (A_1) se déduirait de (A) par une transformation de M. Darboux.

Les systèmes $\left[(U+a)\dfrac{ds^2}{dt'^2},\ Q_i = 0\right]$ *et* $\left[\dfrac{ds_1^2}{dt_1^2},\ Q'_i = 0\right]$ *admettent donc respectivement une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.*

Hypothèse III. — *L'intégrale quadratique* (a) *est distincte de celle des forces vives.*

Cette hypothèse (la plus générale) est toujours réalisée quand, *les forces Q_i ne dérivant pas d'un potentiel,* le premier membre de (a) ne se réduit pas à une constante.

Soit

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \tau - V = \text{const}.$$

cette intégrale. D'après un théorème bien connu, $\tau = \text{const.}$ est une intégrale du mouvement sans forces. On ne saurait donc avoir ici $\tau = \mu(q_1, q_2, \ldots, q_k)\mathrm{T}$, car $\mu = \text{const.}$ serait une intégrale des géodésiques de T. D'ailleurs on n'a pas $\tau = \mathrm{CT}$, sinon l'intégrale (a) serait celle des forces vives (¹). Le seul cas où, dans l'égalité

$$dt_1^2 = \frac{d\sigma^2}{\beta_1'} - \frac{\beta_1}{\beta_1'}\,dt^2,$$

$d\sigma^2$ est égal à $\mu\,ds^2$, correspond ainsi à l'hypothèse II, où

$$dt_1^2 = \lambda^2[ds^2 - (\mathrm{U}+a)dt^2], \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \mathrm{C}\left[\frac{\Delta_1(\mathrm{U}+a)}{\Delta}\right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

Pour la même raison, *le seul cas où $d\sigma^2$ soit égal à*

$$\mu_1(q_1, q_2, \ldots, q_k)\,ds_1^2$$

est celui où, les Q_i' dérivant d'un potentiel U_1, on a

$$dt^2 = \lambda_1^2[ds_1^2 - (\mathrm{U}_1 + a_1)\,dt_1^2], \qquad \lambda_1 = \mathrm{C}'\left[\frac{\Delta(\mathrm{U}_1+a_1)}{\Delta_1}\right]^{\frac{1}{k+1}},$$

c'est-à-dire

$$dt_1^2 = \frac{1}{(\mathrm{U}_1+a_1)}\left[ds_1^2 - \frac{dt^2}{\lambda_1^2}\right].$$

Dans ce dernier cas, en substituant au système (A_1) le système (A_1'),

$$(\mathrm{A}_1') \qquad \frac{d}{dt_1'}\left(\frac{\partial \mathrm{T}_1'}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}_1'}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathrm{U}_1'}{\partial q_i}, \qquad q_i' = \frac{dq_i}{dt_1'},$$

où

$$\mathrm{T}_1' = \frac{(\mathrm{U}_1+a_1)\,ds_1^2}{dt_1'^2} = \frac{ds_1'^2}{dt_1'^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_1' = \frac{1}{\mathrm{U}_1+a_1},$$

on rentre dans l'hypothèse I; on passe de (A) à (A_1') par la transformation

$$\frac{dt^2}{dt_1'^2} = \frac{\lambda_1^2}{(\mathrm{U}_1+a_1)^2}.$$

(¹) On aurait en effet : $\sum \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}\,dq_i \equiv \mathrm{C}\sum \mathrm{Q}_i\,dq_i$; les Q_i admettraient donc le potentiel $\mathrm{U} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}$, et l'intégrale (a) s'écrirait $\mathrm{C}(\mathrm{T}-\mathrm{U}) = \text{const.}$

Signalons enfin, comme dernier cas particulier, celui où, *les forces* Q_i *et* Q'_i *dérivant respectivement des potentiels* U *et* U_1, *la relation entre* dt *et* dt_1 *est de la forme*

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2(q_1, q_2, \ldots, q_k)\left[dt^2 - \frac{ds^2}{U + a}\right].$$

En substituant à (A) le système $\left[T', \frac{1}{U + a}\right]$, où $T' = \frac{(U + a)\,ds^2}{dt'^2}$, et à (A_1) le système $\left[T'_1, \frac{1}{U_1 + a_1}\right]$, où $T'_1 = (U_1 + a_1)\frac{ds_1^2}{dt_1'^2}$, *on rentre dans la première hypothèse*; les géodésiques de T' et de T'_1 coïncident, et les deux nouveaux systèmes se transforment l'un dans l'autre par le changement de variable $\frac{dt'_1}{dt'} = \left[\frac{\Delta_1(U_1 + a_1)^k}{\Delta(U + a)^k}\right]^{\frac{1}{k+1}}$. Quant à la fonction μ, elle est nécessairement de la forme

$$\mu = C_0\left(\frac{U + a}{U_1 + a_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{1}{k+3}} = C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}}\left(\frac{U + a}{U_1 + a_1}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}\right)},$$

et l'on a de plus

$$\frac{\beta_i \Delta^{\frac{2}{k+1}}}{(U + a)^{1 + \frac{2}{k+1}}} = \frac{C^2 \beta'_i \Delta_1^{\frac{2}{k+1}}}{(U_1 + a_1)^{1 + \frac{2}{k+1}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

le nombre C_0 est égal à $C^{\frac{k+1}{k+3}}$.

4. Il convient de compléter ces remarques par quelques *réciproques*. Dans l'hypothèse II, le système (A) possède une fonction de forces U, et les *géodésiques* de ds_1^2 coïncident avec un *faisceau naturel* $h = a$ de (A). Inversement, si les Q_i dérivent d'un potentiel U, et si le *faisceau naturel* $h = a$ de (A) coïncide avec les *géodésiques* de ds_1^2, on se trouve nécessairement dans l'hypothèse II; en effet, le système (A_1) et le système (A'), où $T' = \frac{(U + a)\,ds^2}{dt'^2}$, $U' = \frac{1}{U + a}$, sont deux correspondants dont les géodésiques coïncident; on passe donc de l'un à l'autre par une transformation telle que $\frac{dt_1}{dt'} = \lambda(q_1, \ldots, q_k)$ et comme, d'autre part, $dt'^2 = (U + a)^2[ds^2 - (U + a)\,dt^2]$, la rela-

tion entre dt^2 et dt_1^2 est bien de la forme

$$dt_1^2 = \mu^2\, ds^2 + \nu\, dt^2,$$

ce qui n'a lieu que dans l'hypothèse II.

La même observation s'appliquerait au cas où, les forces Q' dérivant d'un potentiel U_1, les géodésiques de ds^2 coïncideraient avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1). Il suffit, en effet, de permuter (A) et (A_1) pour rentrer dans le cas précédent. Passons enfin au dernier cas particulier que j'ai signalé dans l'hypothèse III. Dans ce cas, (A) et (A_1) possèdent respectivement une fonction de forces U et U_1, et un faisceau naturel $h = a$ de (A) coïncide avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1). Inversement, si cette condition est remplie, les systèmes $\left[\frac{(U+a)\,ds^2}{dt'^2}; \frac{1}{U+a}\right]$ et $\left[\frac{(U_1+a_1)\,ds^2}{dt'^2_1}, \frac{1}{U_1+a_1}\right]$ sont deux correspondants dont les géodésiques coïncident; on a donc entre dt' et dt'_1 une relation telle que $dt'_1 = \lambda(q_1, \ldots, q_k)\, dt'$, et, par suite, entre dt_1 et dt une relation telle que

$$\left(dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1}\right) = \mu^2\left(dt^2 - \frac{ds^2}{U + a}\right);$$

c'est bien la relation qui caractérise le cas particulier dont il s'agit.

5. Avant de résumer les résultats que nous venons d'obtenir, je tirerai encore quelques conséquences de la forme de la relation qui existe entre dt et dt_1. J'écris cette relation ainsi :

$$(m) \qquad \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \lambda^2\left(\frac{d\tau^2}{dt^2} - V\right), \qquad \lambda = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{1}{k+3}},$$

l'égalité

$$(n) \qquad \frac{d\tau^2}{dt^2} - V = c$$

définissant une intégrale première de (A). *A toute intégrale première de* (A_1), *soit*

$$f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_1}{dt_1}, \frac{dq_2}{dt_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dt_1}\right) = C,$$

correspond une intégrale première de (A) qu'on calcule en remplaçant dt_1 en fonction de dt dans f, d'après la formule (m). Mais ce qui est remarquable, c'est qu'*à toute intégrale algébrique et entière de* (A_1) *correspond une intégrale de* (A), *algébrique, entière et de même degré*. La chose est évidente dans le cas où les géodésiques de $\dot{T}$ et de T_1 coïncident, c'est-à-dire où $\frac{dt_1}{dt}$ se réduit à une simple fonction des q_i. Il suffit donc de la démontrer dans le cas général.

Désignons par ds''_n une forme homogène de degré n en $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k$; l'intégrale considérée de (A) sera de la forme

$$ds''_n + dt_1^2\, ds''_{n-2} + \ldots + dt_1^n\, s_0 = C\, dt_1^n \qquad (\text{si } n \text{ est pair}),$$

et de la forme

$$ds''_n + dt_1^2\, ds''_{n-2} + \ldots + dt_1^{n-1}\, ds_1 = C\, dt_1^n \qquad (\text{si } n \text{ est impair}).$$

Remplaçons dans le premier membre les puissances de dt_1^2 par les puissances de $\lambda^2(d\sigma^2 - V\,dt^2)$, et dans le second membre dt_1^n par $dt^n \lambda^n c^{\frac{n}{2}}$; on obtient ainsi une intégrale de (A) entière et de degré n.

La même remarque et la même démonstration s'appliquent aux intégrales *rationnelles*.

Si, notamment, (A_1) possède une intégrale linéaire, soit

$$\Sigma a_i\, dq_i = C\, dt_1,$$

(A) admet l'intégrale

$$\frac{1}{\lambda} \sum a_i\, dq_i = C'\, dt \text{ (1)}.$$

Si (A_1) possède une intégrale quadratique, soit $dS^2 - W\, dt_1^2 = C\, dt_1^2$, (A) admet l'intégrale

$$\frac{dS^2}{\lambda^2} - W\, d\sigma^2 + WV\, dt^2 = C'\, dt^2.$$

(1) Comme toute intégrale linéaire définit une transformation infinitésimale du système (A), deux systèmes (A) et (A_1) correspondants (en particulier deux ds^2 correspondants) admettent le même nombre de transformations infinitésimales.

Appliquons cette dernière remarque au cas *où les forces d'un des systèmes correspondants* (A) *et* (A_1) *dérivent d'un potentiel :* soit, par exemple, U_1 la fonction des forces Q'_i. En premier lieu, *si les géodésiques de* T *et de* T_1 *coïncident*, (A) admet l'intégrale quadratique

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{-\frac{2}{1+k}}(ds_1^2 - U_1\,dt^2) = h'_1\,dt^2.$$

Si les Q_i admettent aussi un potentiel, (A) et (A_1) admettent chacun une intégrale quadratique autre que celle des forces vives.

Dans le cas général, l'intégrale des forces vives de (A_1) donne pour (A) l'intégrale

$$(p)\qquad \frac{ds_1^2}{\lambda^2} - U_1\,d\sigma^2 + U_1 V\,dt^2 = h'_1\,dt^2.$$

Il importe de reconnaître si cette intégrale est distincte de l'intégrale quadratique (a) et de celle des forces vives de (A) (quand cette dernière existe). Pour discuter ce point, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où les Q_i ne dérivent pas d'un potentiel. *Pour que l'intégrale* (p) *se confonde avec l'intégrale* (a), *il faut et il suffit qu'on ait*

$$\frac{ds_1^2}{\lambda^2} - U_1(d\sigma^2 - V\,dt^2) = a_1(d\sigma^2 - V\,dt^2) - b_1\,dt^2$$

(a_1 et b_1 étant deux certaines constantes), ou bien, d'après (m),

$$ds_1^2 - dt_1^2(U_1 + a_1) + b_1\lambda^2\,dt^2 = 0,$$

égalité de la forme

$$dt_1^2 = \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} + \mu\,dt^2,$$

qui caractérise l'hypothèse II, où des géodésiques de ds^2 coïncident avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1).

Supposons maintenant que (A) possède une fonction de forces U ; *à quelles conditions l'intégrale* (p) *se réduit-elle à une combinaison de l'intégrale* (a) *et de celle des forces vives?* Il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{ds_1^2}{\lambda^2} - U_1(d\sigma^2 - V\,dt^2) = a_1(d\sigma^2 - V\,dt^2) + b_1(ds^2 - U\,dt^2) + c_1\,dt^2$$

(a_1, b_1, c_1 étant certains nombres), c'est-à-dire encore

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = -\frac{\lambda^2 b_1}{U_1 + a_1}\left[ds^2 - \left(U - \frac{c_1}{b_1}\right)dt^2\right],$$

égalité de la forme

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2\left[dt^2 - \frac{ds^2}{U + a}\right],$$

qui caractérise le cas particulier où un faisceau naturel $h = a$ de (A) et un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1) coïncident.

En dehors de ces deux cas, l'intégrale (p) sera distincte de l'intégrale (a) et de celle des forces vives.

6. Nous sommes en état maintenant d'énoncer les conclusions suivantes :

Quand deux systèmes (A) *et* (A_1), *où les forces ne sont pas toutes nulles, se correspondent* [1], *on peut toujours passer de l'un à l'autre par une transformation unique de la forme*

$$\frac{dt_1^2}{dt^2} = \lambda^2(q_1, \ldots, q_k)\left(\frac{d\sigma^2}{dt^2} - U\right),$$

où la parenthèse définit une intégrale quadratique de (A) *à moins qu'elle ne se réduise à une constante.* Mais plusieurs cas sont à distinguer :

1° *Les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident; c'est le cas où* $dt_1 = \lambda(q_1, \ldots, q_k)\,dt$. Les équations (A') et (A'_1), déduites de (A) et de (A_1) *en annulant les forces*, admettent une intégrale quadratique, sans qu'il en soit de même nécessairement de (A) et de (A_1). Quand les forces d'un des systèmes, soit (A_1), dérivent d'un potentiel, (A) admet une intégrale quadratique. Quand il existe une fonction de forces dans les deux systèmes, chacun d'eux admet, en outre de l'intégrale des forces vives, une seconde intégrale quadratique.

2° *Un au moins des deux systèmes, soit* A_1, *admet un potentiel, et un faisceau naturel* $h_1 = a_1$ *de* (A_1) *coïncide avec les géodé-*

[1] Il est clair que, (A) et (A_1) jouant un rôle symétrique, on peut permuter dans ces énoncés (A) et (A_1).

siques de ds^2. — On rentre dans le premier cas en substituant à (A_1), à l'aide de la transformation de M. Darboux, le système

$$\left[(U_1 + a_1)\frac{ds_1^2}{dt_1'^2}, \frac{1}{U_1 + a_1}\right].$$

Le système (A) *admet une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives;* le système

$$\left[(U_1 + a_1)\frac{ds_1^2}{dt_1'^2}, Q_i = 0\right]$$

admet aussi une intégrale quadratique. Enfin, *si* (A) *possède un potentiel,* (A_1) *admet lui-même une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.*

3° *Les forces de* (A) *et de* (A_1) *dérivent des potentiels* U *et* U_1, *et deux faisceaux naturels* $h = a$, $h_1 = a_1$ *de* (A) et de (A_1) *coïncident.* On rentre dans le premier cas à l'aide d'une double transformation de M. Darboux. *Les deux systèmes* (A) et (A_1) *possèdent, avec celle des forces vives, une seconde intégrale quadratique.*

4° (*Cas général*). *Aucune des hypothèses particulières qui précèdent n'est vérifiée. Les deux systèmes* (A) *et* (A_1) *ont une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.* Si les forces de (A_1) dérivent d'un potentiel, (A) admet *deux* intégrales quadratiques distinctes; *s'il existe aussi une fonction de forces pour* (A), *les deux systèmes admettent respectivement* trois *intégrales quadratiques distinctes, en y comprenant celles des forces vives.*

Les trois premiers cas se ramènent en définitive au cas où il y a correspondance avec conservation des géodésiques. A ces trois cas s'appliquent donc tous les résultats obtenus dans le Chapitre II. Le quatrième cas au contraire est tout à fait distinct de celui qui a été traité au Chapitre II.

II. — Corollaires des théorèmes précédents.

7. Je vais compléter les résultats précédents par quelques remarques importantes.

Nous avons dit que si un des systèmes correspondants (A) et (A_1) admet une fonction de forces, il n'en est pas de même en général du second. Mais plaçons-nous dans l'hypothèse où U et U_1 existent simultanément.

Nous savons (*voir* Chapitre I, p. 36) que, dans la transformation de M. Darboux, chaque faisceau naturel $h = a$ de (A) (notamment le faisceau des géodésiques $h = \infty$) coïncide avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1). Cette transformation, comme nous l'allons voir, *est la seule qui jouisse de cette propriété;* autrement dit, *si* (A_1) *n'est pas un correspondant ordinaire de* (A), *un faisceau naturel quelconque* $h = a$ *de* (A) *ne coïncide pas avec un faisceau naturel de* (A_1), mais bien avec un faisceau obtenu en prenant dans chaque faisceau $h_1 = a_1$ un faisceau à $(2k - 3)$ paramètres. On peut même aller plus loin, et montrer qu'*il n'existe pas en général de faisceau naturel* $h = a$ *de* (A) *qui coïncide avec un faisceau naturel de* (A_1) *et qu'il n'en existe jamais plus d'un.*

Tout d'abord, si un tel faisceau $h = a$ existe, on se trouve nécessairement dans un des trois premiers cas énumérés plus haut, et l'on peut toujours, en se servant de la transformation de M. Darboux, se placer dans le premier cas, celui où les deux faisceaux naturels qui coïncident sont les faisceaux des géodésiques, $h = \infty$, $h_1 = \infty$. Je dis qu'il ne saurait exister un second faisceau $h = a$ qui se confonde avec un faisceau $h_1 = a_1$, à moins que (A_1) ne soit un correspondant ordinaire de (A).

S'il en était ainsi, en effet, on devrait avoir en même temps

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

et

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2\left(dt^2 - \frac{ds^2}{U + a}\right),$$

égalités qui, pour être compatibles, exigent les conditions

$$\lambda^2 = \mu^2, \qquad \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2 \frac{ds^2}{U + a}.$$

Mais nous avons vu que, si deux ds^2 correspondants sont de la

forme ds^2 et $\mu'^2\,ds^2$, μ' est nécessairement une constante, et les deux systèmes correspondants sont deux correspondants ordinaires. La proposition est donc démontrée.

En définitive, *dans les trois premiers cas du* n° 6, *il existe un faisceau naturel* $h = a$ *de* (A) *et* un seul *qui est aussi un faisceau naturel de* (A_1); *dans le cas général, il n'en existe pas* (¹).

D'après cela, revenons sur le problème qui consiste à reconnaître si, pour chaque valeur de h, $ds'^2 = (U + h)\,ds^2$ admet un correspondant (non semblable)

$$ds_1'^2 = \Sigma A'_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_k, h)\,dq_i\,dq_j.$$

Est-il possible que le système $\left(\frac{ds_1'^2}{dt_1'^2}, Q'_i = 0\right)$ se rattache à un système (A_1) indépendant de h, de la même manière que le système $\left(\frac{ds'^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right)$ se rattache à (A)? Autrement dit, $ds_1'^2$ peut-il être de la forme $(U_1 + h_1)\,ds_1^2$, h_1 étant une certaine fonction de h, et U_1, ds_1^2 n'en dépendant pas? Cela n'a jamais lieu; car, autrement, les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right)$ seraient deux correspondants non ordinaires, et *tout* faisceau naturel de l'un serait faisceau naturel de l'*autre*. La recherche des $ds_1'^2$ est donc tout à fait distincte de celle des correspondants de (A).

8. Nous nous sommes appuyés, dans ce Chapitre, sur quelques propositions obtenues antérieurement et notamment sur celle-ci :

Pour que deux systèmes (A) *et* (A_1) *soient correspondants avec conservation des géodésiques, il faut et il suffit qu'on puisse passer*

(¹) J'insiste sur ce point, qui a son importance dans la théorie des groupes de transformations des trajectoires, et qui a donné lieu à une discussion entre M. Liouville et moi. M. Liouville pensait avoir démontré que, *pour* $k > 2$, *chaque* faisceau naturel de (A) est *toujours* un faisceau naturel de (A_1) (voir les *Comptes rendus*, 31 octobre 1892). En réalité, les considérations précédentes montrent qu'il n'en est *jamais* ainsi.

de (A) *à* (A_1) *à l'aide de la transformation*

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Il est bien facile de démontrer cette proposition en se servant de la relation qui existe, dans tous les cas, entre dt et dt_1 quand (A) et (A_1) sont deux correspondants où les forces ne sont pas nulles. Cette relation peut s'écrire

$$\frac{dt_1^2}{dq_1^2} - \mathrm{M}\frac{dt^2}{dq_1^2} = \frac{d\sigma'^2}{dq_1^2}.$$

Nous savons que les géodésiques de ds^2 sont un faisceau de trajectoires de (A) à $(2k-2)$ paramètres qui satisfont à la condition $\frac{dt}{dq_1} = 0$ $\left(\text{ou } \frac{d^2q_2}{dq_1^2} + \Phi_1\frac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2 = 0\right)$; pour que les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 coïncident, il faut donc et il suffit que les conditions $\frac{dt_1}{dq_1} = 0$ et $\frac{dt}{dq_1} = 0$ soient équivalentes; comme on a, pour $\frac{dt}{dq_1} = 0$,

$$\frac{dt_1^2}{dq_1^2} - \frac{d\sigma'^2}{dq_1^2} = 0,$$

il faut et il suffit que $\frac{d\sigma'^2}{dq_1^2}$ soit identiquement nul, et, par suite, que $\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \mathrm{M}(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Nous savons alors (*voir* le n° **5** de ce Chapitre, p. 66) que $\mathrm{M} = \mathrm{C}_0^2\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{2}{k+1}}$. C. Q. F. D.

Ceci nous permet de retrouver le théorème démontré dans le premier Chapitre et auquel nous avons eu souvent recours : *Si les systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, \mathrm{Q}_i\right)$ *et* $\left(\mathrm{C}\frac{ds^2}{dt_1^2}, \mathrm{Q}'_i\right)$ *sont correspondants, on a nécessairement* $\mathrm{Q}'_1 = c\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}'_k = c\mathrm{Q}_k$. En effet, les géodésiques de ds^2 et de $\mathrm{C}\,ds^2$ coïncidant, on a

$$\frac{dt_1}{dt} = \mathrm{C}_0\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}} = \mathrm{C}_0\mathrm{C}^{\frac{k}{k+1}},$$

et d'autre part

$$\beta_i\Delta^{\frac{2}{k+1}} = \mathrm{C}_0^2\beta'_i\Delta_1^{\frac{2}{k+1}},$$

donc

$$\beta_i = \beta'_i C_0^2 C^{\frac{2k}{k+1}}.$$

et comme

$$\beta_i = \sum_j a_{ij} Q_j \qquad \text{et} \qquad \beta'_i = \frac{1}{C} \sum_j a_{ij} Q'_j,$$

on trouve

$$Q'_i = \frac{1}{C_0^2 C^{\frac{k-1}{k+1}}} Q_i, \qquad Q'_i = c Q_i,$$

et, si l'on remplace dans $\frac{dt_1}{dt}$, C_0 en fonction de C et c,

$$\frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\frac{C}{c}}.$$

Ce sont bien les résultats déjà obtenus.

9. Nous avons également démontré dans le Chapitre II que *deux systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *ne peuvent être correspondants pour deux systèmes distincts de forces associées, soit* Q_i *et* Q'_i *d'une part,* (Q_i) *et* (Q'_i) *d'autre part, sans que les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident* (au moins, quand k dépasse 2).

Voici une nouvelle démonstration de ce théorème qui nous fournit en même temps des résultats pour $k = 2$.

Admettons que les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 ne coïncident pas: nous avons, d'après les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$, la relation (*voir* p. 60)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & dt^2(\beta_i\, dq_1 - \beta_1\, dq_i) - dt_1^2(\beta'_i\, dq_1 - \beta'_1\, dq_i) \\ & \quad = (H_1 - H'_1)\, dq_i - (H_i - H'_i)\, dq_1, \qquad \equiv S_i, \end{aligned} \right.$$

les H étant des formes quadratiques en $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k$, qui ne dépendent que de ds^2 et de ds_1^2. Nous savons d'ailleurs qu'on a nécessairement

$$\frac{\beta_i}{\beta'_i} = \frac{\beta_1}{\beta'_1},$$

que, de plus, le second membre S_i de (1) est divisible par

$$(\beta_i\, dq_1 - \beta_1\, dq_i),$$

et que le quotient, soit $d\sigma^2$, est le même quel que soit i. On a de même d'après $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, (Q_i)\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, (Q'_i)\right]$,

$$dt^2(\gamma_i\, dq_1 - \gamma_1\, dq_i) - dt_1^2(\gamma'_i\, dq_1 - \gamma'_1\, dq_i)$$
$$= (H_1 - H'_1)\, dq_i - (H_i - H'_i)\, dq_1,$$

et des remarques analogues s'appliquent à cette égalité.

Ceci rappelé, je dis que, *si k dépasse* 2, on a nécessairement

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_i}{\gamma_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Soit, en effet, $\frac{\beta_1}{\gamma_1} \neq \frac{\beta_2}{\gamma_2}$; un de ces rapports au moins sera différent de $\frac{\beta_3}{\gamma_3}$, soit $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$; le binome $(\gamma_2\, dq_1 - \gamma_1\, dq_2)$, divisant S_2 [le second membre de (1) pour $i = 2$] et étant premier avec $(\beta_2\, dq_1 - \beta_1\, dq_2)$, doit diviser $d\sigma^2$; pour la même raison, $(\gamma_3\, dq_1 - \gamma_1\, dq_3)$ divise aussi $d\sigma^2$; on devrait donc avoir

$$S_2 = M(q_1, \ldots, q_k)$$
$$\times (\beta_2\, dq_1 - \beta_1\, dq_2)(\gamma_2\, dq_1 - \gamma_1\, dq_2)(\gamma_3\, dq_1 - \gamma_1\, dq_3),$$

et de même

$$S_2 = N(q_1, \ldots, q_k)$$
$$\times (\gamma_2\, dq - \gamma_1\, dq_2)(\beta_2\, dq_1 - \beta_1\, dq_2)(\beta_3\, dq_1 - \beta_1\, dq_3).$$

Cette double égalité n'est possible que si $\frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}$, ce qui est contre l'hypothèse. On a donc bien

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \ldots = \frac{\beta_k}{\gamma_k}.$$

D'autre part, l'expression

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\, \frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2$$

étant une intégrale première de (A), l'expression

$$\left(\frac{\Delta\beta_1'}{\Delta_1\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \frac{S_2}{\beta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}dq_1 - dq_2\right)} = \left(\frac{\Delta\beta_1'}{\Delta_1\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \frac{d\sigma'^2}{\beta_1}$$

est une intégrale du système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$; il en est de même de l'expression

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \frac{d\sigma'^2}{\gamma_1};$$

ceci n'est possible que si l'on a

$$\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{\beta_1'}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} = \frac{C}{\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}.$$

En permutant les systèmes (A) et (A_1), on trouverait de même

$$\frac{1}{\beta_1'}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1'}\right)^{\frac{2}{k+3}} = \frac{C'}{\gamma_1'}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1'}\right)^{\frac{2}{k+3}},$$

et de ces deux égalités on tire

$$\gamma_1 = c\beta_1, \qquad \gamma_1' = c'\beta_1.$$

Comme enfin

$$\beta_i = \sum_i a_{ij} Q_j \qquad \text{et} \qquad \gamma_i = \sum_i a_{ij}(Q_j),$$

on a en définitive

$$\frac{(Q_1)}{Q_1} = \frac{(Q_2)}{Q_2} = \ldots = \frac{(Q_k)}{Q_k} = c, \qquad \frac{(Q_1')}{Q_1'} = \frac{(Q_2')}{Q_2'} = \ldots = \frac{(Q_k')}{Q_k'} = c';$$

les systèmes de forces (Q_i) et (Q_i') ne sont pas *distincts* des systèmes Q_i et Q_i'. C. Q. F. D.

La dernière partie de la démonstration subsiste si $k = 2$; par suite, quand $\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2}$, la valeur commune de ces deux rapports est nécessai-

rement une constante; mais on ne peut plus établir, comme précédemment, que ces rapports sont identiques. Le raisonnement employé fait voir seulement que

$$S_2 = M(E\,dq_1 + F\,dq_2)(\beta_2\,dq_1 - \beta_1\,dq_2)(\gamma_2\,dq_1 - \gamma_1\,dq_2);$$

le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ *admet donc nécessairement deux intégrales quadratiques* distinctes, *en outre de celle des forces vives*, à savoir deux intégrales de la forme

$$\lambda(E\,dq_1 + F\,dq_2)(\gamma_1\,dq_2 - \gamma_2\,dq_1) = C\,dt^2,$$

et

$$\mu(E\,dq_1 + F\,dq_2)(\beta_1\,dq_2 - \beta_2\,dq_1) = C'\,dt^2;$$

de même le système $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right)$ admet deux intégrales de même forme. Il suit de là que les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ ne peuvent se correspondre pour plus de *trois* systèmes de forces distinctes. Si trois tels systèmes existent, soit Q_i et Q'_i, (Q_i) et (Q'_i), $[(Q_i)]$ et $[(Q'_i)]$, les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right)$ admettent respectivement trois intégrales linéaires distinctes, *et par suite* ds^2 *et* ds_1^2 *sont les* ds^2 *d'une surface à courbure constante*. J'arrête ici cette discussion du cas particulier de deux paramètres, dont l'étude ne présente plus dès lors de difficulté et sera développée complètement dans un autre Mémoire.

10. Comme dernier corollaire du théorème général, démontrons enfin cette proposition importante :

Soit deux correspondants non ordinaires $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *et* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$; *il est impossible que la condition* $ds_1^2 = \mu(q_1, \ldots, q_k)\,ds^2$ *soit remplie.*

Tout d'abord, observons que cette condition est réalisée pour les correspondants ordinaires; car on a alors soit $ds_1^2 = C\,ds^2$, soit $ds_1^2 = C(U + h)\,ds^2$, U désignant le potentiel des Q_i. Le théorème

exprime que ces correspondants sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

La chose est évidente si les géodésiques coïncident, ainsi que nous l'avons déjà remarqué; car $\mu(q_1, q_2, \ldots, q_k) = \text{const.}$ doit être une intégrale des géodésiques et, par suite, se réduit à une constante. Voici une démonstration qui embrasse tous les autres cas.

Admettons que ds_1^2 soit égal à $\mu\, ds^2$, et écrivons une des équations (A) et une des équations (A_1),

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt^2} + N_i = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt_1^2} + N_i + \frac{\partial (\mathrm{T})}{\partial (q_i')} \frac{d\nu}{dt_1} - (\mathrm{T}) \frac{\partial \nu}{\partial q_i} = \frac{Q_i'}{\mu};$$

ν représente $\log \mu$, et (T) ce que devient T quand on y remplace q_i' par $(q_i') = \frac{dq_i}{dt_1}$. Il suit de là que, si l'on désigne par a_{ij} le mineur de Δ relatif à l'élément A_{ij} et divisé par Δ, on aura

$$\frac{d^2 q_i}{dt_1^2} = (\mathrm{P}_i) - \frac{d\nu}{dt_1} \sum_{j=1}^{j=k} a_{ij} \frac{\partial (\mathrm{T})}{\partial (q_j')} + (\mathrm{T}) \sum_{j=1}^{j=k} a_{ij} \frac{\partial \nu}{\partial q_j} + \beta_i';$$

mais, d'après les égalités $p_i = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}$, on a précisément

$$q_i' = \sum_j a_{ij} p_j, \qquad \text{donc} \qquad q_i' = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j'},$$

en sorte qu'on peut écrire, en posant $\mathrm{B}_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \nu}{\partial q_j}$,

$$\frac{d^2 q_i}{dt_1^2} = (\mathrm{P}_i) - (q_i') \frac{d\nu}{dt_1} + (\mathrm{T}) \mathrm{B}_i + \beta_i'.$$

La relation entre dt et dt_1 est donc ici

$$\begin{aligned} dt^2 (\beta_2\, dq_1 - \beta_1\, dq_2) &- dt_1^2 (\beta_2'\, dq_1 - \beta_1'\, dq_2) \\ &= (\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_1 + d\nu\, dq_1 - \mathrm{B}_1\, ds^2) dq_2 - (\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_2 + d\nu\, dq_2 - \mathrm{B}_2\, ds^2) dq_1 \\ &= ds^2 (\mathrm{B}_2\, dq_1 - \mathrm{B}_1\, dq_2). \end{aligned}$$

Le binome $(\beta_2 dq_1 - \beta_1 dq_2)$ doit diviser le second membre [1]; il ne peut (si k est supérieur à 2) diviser ds^2 dont le discriminant Δ n'est pas nul; la relation entre dt_1 et dt est donc de la forme

$$dt_1^2 = M(ds^2 - V\,dt^2),$$

qui caractérise l'hypothèse II, où les géodésiques de $(U + a)ds^2$ et celles de ds_1^2 coïncident, U désignant la fonction de forces de (A) qui existe alors nécessairement, et a une certaine constante finie.

En permutant les deux systèmes, on voit de même que les géodésiques de ds^2 coïncident avec les géodésiques de $(U_1 + a_1)ds_1^2$, U_1 désignant la fonction de forces de (A_1) qui existe nécessairement et a_1 un certain nombre fini. Cette double circonstance (d'après le théorème du n° **7**) ne peut se présenter que dans la transformation de M. Darboux. C. Q. F. D.

Pour les systèmes à deux paramètres, il n'est pas impossible que $\beta_2 dq_1 - \beta_1 dq_2$ divise ds^2; j'observe seulement que le ds^2 serait alors nécessairement le ds^2 d'une surface imaginaire. On voit aussitôt que ds^2 (et ds_1^2) sont deux ds^2 de M. Lie; car si l'on ramène ces ds^2 à la forme $\lambda\,dq_1\,dq_2$, le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ possède une intégrale quadratique telle que $dq_1(m\,dq_1 + n\,dq_2) = C\,dt^2$, qui caractérise les ds^2 de M. Lie. Je me borne à ces indications sur le cas de deux paramètres, qu'il est très facile dès lors de traiter directement et que je discuterai dans un travail ultérieur.

III. — Conditions suffisantes pour qu'un système (A) admette des correspondants. Équations générales du calcul des variations.

11. D'après ce qui précède, quand un système (A) ou $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ possède un correspondant non ordinaire $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$, les deux systèmes

---

[1] Si le second membre était identiquement nul, on aurait $dt_1^2 = \lambda^2 dt^2$, et les géodésiques coïncideraient.

$\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q' = 0\right]$ admettent respectivement une intégrale quadratique; dans certains cas, toutefois, il faut substituer dans l'énoncé à un de ces systèmes, au premier par exemple, le système $\left[(U+a)\frac{ds^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$. L'existence d'une intégrale quadratique de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ ou même de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ n'est pas d'ailleurs une condition *suffisante* pour que (A) possède un correspondant. C'est ainsi que le système (A), rencontré par Jacobi, où ds^2 est égal à $\sum_{i=1}^{i=k} \frac{F'(q_i)}{f(q_i)} dq_i^2$ (*voir* Chap. II, p. 54) et où $U = \sum \frac{\psi_i(q_i)}{F'(q_i)}$, admet un système complet d'intégrales quadratiques sans posséder en général de correspondants non ordinaires.

Pour former les conditions suffisantes, un procédé consiste à exprimer qu'on peut passer de (A) à (A_1) par une transformation de la forme

$$dt_1^2 = d\sigma^2 - \alpha\, dt^2.$$

Ces conditions se présentent comme beaucoup plus compliquées que dans le cas des forces nulles; mais on les simplifie notablement en tenant compte *immédiatement* des conditions nécessaires déjà connues : 1° $\frac{\beta'_1}{\beta_1} \equiv \frac{\beta'_i}{\beta_i}$; 2° l'expression $(H_1 - H'_1)\,dq_i - (H_i - H'_i)\,dq_1$ est divisible par $\frac{\beta_i}{\beta_1} dq_1 - dq_i$, et le quotient, $d\sigma^2$ est indépendant de i; 3° $\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left[\frac{-d\sigma^2}{\beta'_1} + \frac{\beta_1}{\beta'_1} dt^2\right]$ est une intégrale de (A), et $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left[\frac{d\sigma^2}{\beta_1} + \frac{\beta'_1}{\beta_1} dt_1^2\right]$ une intégrale de (A_1).

Pour qu'il y ait correspondance avec conservation des géodésiques, il faut que $d\sigma^2 \equiv 0$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(H_1 - H'_1)\,dq_i - (H_i - H'_i)\,dq_1 \equiv 0,$$

conditions nouvelles à ajouter aux précédentes. Mais on peut se demander si *ces conditions ne sont pas nécessairement des consé-*

quences des premières; autrement dit, si la correspondance avec conservation des géodésiques (ou du moins d'un faisceau naturel) n'est pas la *seule possible*. Il n'en est rien, et pour s'en assurer un moyen simple est de former un exemple. Je citerai seulement le suivant : les deux systèmes

$$[T, U] \quad \text{et} \quad [T_1, U_1],$$

où

$$T = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \qquad U = gz,$$

et où

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{1}{x^4}\Bigg[\left(\frac{dx}{dt_1}\right)^2\left(1 + y^2 + \frac{4z^2}{x^2}\right) + 2\frac{dx}{\partial t_1}\frac{dy}{dt_1}xy \\ - 4\frac{dx}{dt_1}\frac{dy}{dt_1}\frac{z}{x} + \left(\frac{dy}{dt_1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{dz}{dt_1}\right)^2\Bigg], \end{aligned}$$

$$U_1 = \frac{gz}{x^2},$$

sont correspondants; leurs trajectoires sont des paraboles d'axe parallèle à Oz. Aucun faisceau naturel $h = a$ de (A) n'est faisceau naturel $h_1 = a_1$ du second système. Observons que ces deux systèmes sont en même temps *homologues;* on passe de l'un à l'autre en changeant x en $\frac{1}{x}$, y en $\frac{y}{x}$, z en $\frac{z}{x^2}$ et en faisant $t = t_1$. Ce changement de variable transforme les paraboles trajectoires en elles-mêmes.

Si donc on forme, comme je viens de l'indiquer, les conditions *suffisantes* pour que (A) admette un correspondant, les systèmes (A) répondant à ces conditions comprendront comme *systèmes particuliers* ceux qui satisfont de plus à la condition que les géodésiques (ou un faisceau naturel) se conservent. Il est d'autre part très facile de trouver des ds^2 correspondants, par suite des systèmes (A) qui admettent des correspondants ayant mêmes géodésiques; de ces systèmes enfin on déduit sans peine des correspondants qui possèdent un faisceau naturel commun. Les quatre cas que nous avons énumérés au n° **6** peuvent donc bien se présenter.

12. Je reviendrai ailleurs sur les conditions suffisantes en question. Je terminerai ces généralités en remarquant qu'elles peuvent

s'étendre aux *équations quelconques provenant du calcul des variations*. Considérons une fonction

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)$$

assujettie à la seule condition que son hessien relatif aux q'_i ne soit pas nul, et écrivons les équations

$$(\alpha) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q'_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si un second système analogue (α_1) définit les mêmes trajectoires, on passe de (α_1) à (α) par une transformation

$$\frac{dt_1}{dt} = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k),$$

d'où l'on peut déduire, en général, une intégrale première de (α) [et de (α_1)]; dans le cas où cette intégrale se réduit à une constante absolue, on connaît, en général, une intégrale du système (α) où l'on a annulé les Q_i. Quand f est homogène en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, et de degré m ($m \neq 0$ et 1), l'analogie avec les équations de Lagrange est presque complète : il convient là encore de distinguer deux cas suivant que tous les Q_i, Q'_i sont nuls ou non; ce dernier cas se décompose lui-même en quatre autres d'après la classification du n° **6**.

IV. — Conséquences générales et applications particulières des théorèmes précédents.

15. Je me bornerai à indiquer brièvement ici quelques-unes des conséquences les plus importantes des théorèmes que je viens d'établir, et aussi quelques applications pour montrer avec quelle facilité elles découlent de ces généralités.

Tout d'abord, nous savons qu'à un correspondant non ordinaire (A_1) de (A) est attachée une certaine intégrale quadratique soit de (A), soit d'un des systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ ou $\left[(U + a)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$. Cette

intégrale une fois connue, le calcul du correspondant (A_1) n'offre plus aucune difficulté. Or la détermination des intégrales quadratiques de (A) dépend, dans l'hypothèse la moins favorable, d'un système différentiel linéaire complet. *La détermination des correspondants d'un système* (A) *donné n'exige donc jamais que l'intégration d'équations linéaires.*

Si, en particulier, on veut résoudre les problèmes I et II de l'Introduction, il faut, parmi les ds_1^2, distinguer ceux qui sont *homologues* de ds^2 et calculer les transformations de passage de ds^2 à ds_1^2; *recherche qui n'introduit encore que des équations linéaires.* Notamment, *le calcul des transformations* $q_i = \varphi_i(r_1, \ldots, r_k)$ *qui conservent les trajectoires d'un système donné n'exige jamais que l'intégration d'un système linéaire complet.*

14. Insistons maintenant sur le problème particulier énoncé au début de l'Introduction : *Un système* (A) *étant donné, existe-t-il un système* (A_1) *qui définisse le même* MOUVEMENT? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe entre dt et dt_1 une relation de la forme $\frac{dt_1}{dt} = 1$. Si les forces Q_i, Q'_1 sont nulles, pour que les deux mouvements coïncident, il faut donc et il suffit que (A) et (A_1) soient deux correspondants pour lesquels $\Delta = C\Delta_1$, C étant une constante. Si les forces Q_i, Q'_i ne sont pas toutes nulles, il faut et il suffit que (A) et (A_1) soient deux correspondants dont les géodésiques coïncident, et tels de plus que $\Delta \equiv C\Delta_1$; on aura alors $\beta_i = \beta'_i$ et $\frac{dt_1}{dt} = 1$ pour un des systèmes $[T_1, cQ'_i]$.

Il suit de là que, pour trouver tous les systèmes (A_1) cherchés, *il faudra déterminer tous les* ds^2, soit dS^2, *ayant mêmes géodésiques et même discriminant que* ds^2. *A tout système de forces* Q_i *correspondra un système de forces* Q'_i *(et un seul) tel que les deux mouvements définis par* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *et par* $\left(C\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *coïncident* (C est un nombre choisi arbitrairement).

On voit aisément que les ds^2 des surfaces à courbure constante admettent de tels correspondants ds_1^2, et il en est de même des ds^2 des surfaces à courbure constante de l'espace à $(k+1)$ dimensions. Pour

$k=2$, il n'existe pas d'autres ds^2 jouissant de cette propriété, mais pour $k>2$ il n'en est plus ainsi. M. Liouville (¹) a déterminé *tous les ds^2 à trois variables tels que le mouvement défini par* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i=0\right)$ *puisse être aussi défini par un second système* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i=0\right)$ *et tel de plus que les discriminants* Δ et Δ_1 *de ds^2 et de ds_1^2 soient identiques.* D'après ce qui précède, cette dernière condition est inutile et rentre dans la première. Les ds^2 déterminés par M. Liouville constituent donc tous les ds^2 à trois variables, tels que le *mouvement* défini par un système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ puisse être aussi défini par un autre système distinct du premier $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$.

15. Revenons aussi sur le problème II de l'Introduction : « Étant donné le système (A) ou $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$, déterminer des forces R'_i telles que, si on les substitue aux Q_i, les nouvelles trajectoires se déduisent des premières en changeant q_i en $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. » Les trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ comprendront un faisceau commun, à savoir les géodésiques de ds^2. Deux cas sont à distinguer suivant que ce faisceau se transforme ou non en lui-même quand on change q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$. Occupons-nous seulement du premier cas.

La transformation $q_i=\varphi_i$ et son inverse substituent alors à ds^2 deux ds^2 homologues, soit ds'^2 et ds_1^2 (²), dont les géodésiques coïncident avec celles de ds^2. Par suite, tout système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ possède un correspondant de la forme $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$; l'homologue déduit de ce correspondant en changeant les q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$, est de la forme $\left[\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right]$ et les forces R'_i conviennent au problème.

Si donc les géodésiques de ds^2 admettent une transformation

(¹) Voir les *Comptes rendus*, avril 1891.

(²) ds_1^2 peut d'ailleurs coïncider avec ds^2.

$q_i = \varphi_i$ en elles-mêmes, à tout système de forces Q_i correspondent des forces R_i, telles que les trajectoires définies par $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ se déduisent des trajectoires définies par $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ en changeant q_i en $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$.

16. Que les géodésiques se conservent ou non, est-il possible que la transformation $q_i = \varphi_i$ soit *conforme*, je veux dire change ds^2 en $\mu(q_1, q_2, \ldots, q_k)\, ds^2$? S'il en est ainsi, l'inverse de cette transformation substitue au système $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ un correspondant de A, soit $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'\right)$, où $ds_1^2 = \mu\, ds^2$; il faudra donc qu'on ait ou bien $ds_1^2 = C\, ds^2$ et $Q'_i = c\, Q_i$, ou bien $ds_1^2 = (a\mathrm{U} + b)\, ds^2$ et $\mathrm{U}_1 = \frac{C}{a\mathrm{U} + b}$. On déterminera donc tous les ds^2 de la forme $C\, ds^2$, ou de la forme $(a\mathrm{U} + b)\, ds^2$ (quand U existe), qui sont *homologues* de ds^2, et toutes les transformations de passage $q_i = \varphi_i$; si l'on prend $R'_i = C \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} Q_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ pour le premier cas, et si l'on change les q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$ dans $\frac{C}{a\mathrm{U} + \beta}$ pour le second, on obtient des forces R'_i ou une fonction de forces U' telles que les trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ ou de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, \mathrm{U}'\right)$ se déduisent des premières par une transformation conforme.

Par exemple, soit $ds^2 = dx^2 + dy^2$. En outre de la transformation banale définie par l'égalité $x + iy = (\mathrm{A} + i\mathrm{B})(x_1 \pm iy_1) + \mathrm{C} + i\mathrm{D}$, il existera d'autres transformations conformes faisant passer des trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ aux trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$, si U existe et satisfait à la condition $\frac{\partial^2 \log \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log \mathrm{U}}{\partial y^2} = 0$. Posons alors

$$-\log \frac{1}{2}\mathrm{U} + i\mathrm{V} = \log \frac{df_1}{dz} + \mathrm{A} + i\mathrm{B},$$

f_1 représentant une fonction analytique de $z = x + iy$; l'égalité $z_1 = f_1(z)$ définit deux fonctions $x = \varphi(x_1, y_1)$, $y = \psi(x_1, y_1)$; soit

U' ce que devient l'expression $\frac{C}{U}$ quand on y change x et y en $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$; les trajectoires du système $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, U'\right)$ se déduisent de celles du système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ en changeant x et y en $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$. C'est un théorème de M. Goursat (¹).

17. L'application de certaines des remarques précédentes permet de retrouver sans peine tous les résultats déjà obtenus par les divers auteurs qui se sont occupés de systèmes correspondants particuliers. Par exemple, les géodésiques de $ds^2 \equiv dx^2 + dy^2$ admettent le groupe des *transformations homographiques* à deux variables. D'après le théorème du n° **15**, à chaque système de forces Q_i correspondent des forces R'_i telles que les trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ se déduisent les unes des autres par une transformation homographique quelconque donnée à l'avance. Les formules de passage découlent immédiatement des formules établies dans le Chapitre II (p. 49) sur les correspondances qui conservent les géodésiques. On retrouve ainsi les résultats bien connus de M. Appell.

Il est clair que les mêmes conclusions s'appliquent aux ds^2 à deux variables dont les géodésiques admettent la transformation homographique la plus générale. Quels sont ces ds^2? Leurs géodésiques étant des droites $Aq_1 + Bq_2 + C = 0$, ces ds^2 sont correspondants de $dx^2 + dy^2$, et possèdent par suite trois transformations infinitésimales en eux-mêmes (*voir* Chap. III, Section V, p. 72) : d'après un théorème de M. Lie, ce sont les ds^2 de surfaces à courbure constante. D'autre part, on voit immédiatement, sur la sphère et la pseudosphère, que toute surface à courbure constante est représentable géodésiquement sur le plan. De cette seule remarque, il résulte (Chap. II, Section VI, p. 48) que *tout mouvement* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *sur une surface à courbure constante correspond à un mouvement plan,* et que les surfaces à courbure constante sont les seules à jouir de cette pro-

---

(¹) Voir les *Comptes rendus* (avril 1889) et la Note de M. Darboux faisant suite à celle de M. Goursat.

priété. On connaît les travaux de MM. Paul Serret, Appell et Dautheville sur la question.

Toutes ces remarques peuvent être répétées sans modification pour les ds^2 de la forme $dx_1^2 + \ldots + dx_k^2$, et pour les ds^2 des surfaces à courbure constante de l'espace à $(k+1)$ dimensions.

Mais les généralités développées dans ce Mémoire comportent beaucoup d'autres applications entièrement nouvelles. C'est ainsi qu'elles permettent, *pour* $k = 2$, d'élucider complètement la question des correspondants, d'en former tous les types [en s'aidant des travaux récents de M. Kœnigs (¹)] et, par suite, de déterminer les groupes des transformations des trajectoires. Cette dernière recherche peut d'ailleurs être effectuée par un procédé direct. Dans un Mémoire ultérieur, en même temps que je reviendrai sur les conditions suffisantes pour qu'il existe des correspondants, je traiterai en détail les applications les plus importantes et notamment celles qui concernent les systèmes à deux et trois paramètres.

(¹) Voir les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1893).

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un solide [suite et fin (1)].

Par M. H. WILLOTTE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

I. *Rappel des notions fondamentales sur les atomes des corps et les forces interatomiques.* — Dans cette troisième Partie de nos études, nous nous proposons de montrer les applications de la théorie contenue dans les deux premières Parties.

On sait que les masses, dites *pondérables*, répandues dans l'Univers exercent les unes sur les autres des actions qui, tant que leurs distances mutelles restent de grandeur appréciable aux instruments de mesure, peuvent se représenter par des forces *attractives* fonctions desdites distances; c'est en la constatation de ces forces que réside le principe de la *gravitation universelle*.

Si l'on rapproche deux masses pondérables de façon à rendre leur distance aussi petite que possible, on remarque que l'action existant entre ces masses change de sens quand la distance est devenue très voisine de la limite au delà de laquelle on ne peut plus rapprocher davantage les deux masses; l'attraction s'est alors transformée en une *répulsion* qui se manifeste, dans les solides et les liquides, par les effets dits de *résistance à la compression*.

---

(1) Voir le *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 399, 431, et t. IX, p. 1, 28.

Quand on fait subir à un corps solide ou liquide un effort de compression (en ayant soin, dans le cas du solide, de s'arranger pour que toutes les parties de celui-ci travaillent réellement à la compression), on constate que, quel que soit l'effort, la diminution relative du volume du corps est toujours excessivement faible. Il semble légitime de conclure de là que l'épaisseur du champ d'action des efforts de répulsion autour de chacune des particules pondérables constitutives des corps est excessivement petite par rapport aux dimensions desdites particules. Traçons par la pensée, autour de chacun des centres M constituant ce que l'on appelle les *particules indivisibles* de la matière pondérable, deux surfaces fermées (S), (S′), l'une (S) limitant la portion d'espace dans laquelle les particules voisines de la particule M ne peuvent pénétrer, quelque grand que soit l'effort qui tend à les rapprocher de M, l'autre (S′) enveloppant (S) et formant autour de M le lieu des points de changement de sens de l'action émanée de M; les portions des normales à (S) comprises entre (S) et (S′) seront toutes excessivement petites par rapport aux dimensions de (S).

Les auteurs qui ont écrit sur ces questions ne sont pas d'accord sur le mode d'organisation des particules indivisibles constitutives de la matière : quelques-uns pensent que ces particules consistent en petits solides indéformables et insécables auxquels on donne le nom d'*atomes;* certains estiment que les plus petites particules de matière pondérable dont l'on puisse étudier les propriétés, autrement dit les atomes chimiques, ne sont pas absolument indivisibles et doivent être considérés comme des amas de grains d'une matière excessivement ténue, l'éther sans doute, liés entre eux dans un même amas par des forces très grandes par rapport aux forces qui agissent entre les différents atomes; d'autres enfin, les plus nombreux peut-être, croient que chaque particule est un simple point géométrique d'où émanent des actions qui, attractives sur les points analogues éloignés, changent de sens pour les points situés à petites distances et, en devenant répulsives, croissent très rapidement de manière à grandir indéfiniment quand les distances diminuent en se rapprochant respectivement de leurs limites minima infranchissables.

Quel que soit celui de ces trois systèmes que l'on adopte, les forces répulsives agissant entre les particules pondérables indivisibles pour-

ront en tout cas être regardées comme ayant des propriétés très voisines des forces de percussion; car, comme il a déjà été noté page 94 ci-dessus, il résulte des faits de résistance à la compression constatés sur tous les solides et liquides sans exception que l'épaisseur du champ d'action de ces forces répulsives est toujours excessivement petite par rapport aux dimensions des particules et, ainsi que nous l'avons remarqué au commencement de ces études (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VII, p. 399), les forces de percussion constituent précisément des représentations de ce que deviennent à la limite les forces qui grandissent très rapidement dans un champ d'action excessivement petit.

Pour résumer en un mot ce qui précède, nous conviendrons d'appeler *atomes pondérables* les dernières particules indivisibles de la matière pondérable, entendant seulement dire par là que ces particules jouissent de propriétés mécaniques différant peu de celles que posséderaient de petits solides indéformables et sont, par conséquent, susceptibles de donner naissance par leur rapprochement mutuel à des forces dont la nature est voisine de celle des forces de percussion.

D'autre part, tous les faits de la Physique, ceux de l'Optique notamment, tendent à montrer que la résistance infiniment grande que les atomes pondérables opposent à la pénétration par leurs pareils existe également pour leur pénétration par les particules de l'éther. Il paraît par suite légitime de regarder les particules d'éther comme susceptibles, lorsqu'elles se rapprochent des atomes pondérables de la nature, de faire naître entre elles et ces atomes des forces analogues à celles existant entre les atomes pondérables et propres à être représentées, comme celles-ci, par des forces de percussion. Dans ces conditions, on pourra appliquer la théorie exposée en nos précédentes études à la recherche des relations existant entre l'éther et les atomes pondérables constitutifs des corps.

II. *Conditions d'application de la théorie exposée.* — Rappelons les résultats trouvés. Nous avons établi (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. IX, p. 25) que, lorsqu'on considère un solide isolé ayant pour plans de symétrie les plans de ses axes principaux passant par son centre de gravité (tel que, par exemple, un ellipsoïde

homogène) en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide infiniment divisé, la valeur moyenne de la *force vive totale* à attribuer au solide pour l'équilibre dynamique du système est égale à une quantité *qui ne dépend que de la constitution du fluide.*

Il faut pour cela que (*loc. cit.*, p. 11) aucune cause extérieure ne soit venue agir sur les régions du fluide entourant le solide pour introduire dans ce fluide un mode particulier de distribution des déplacements et des vitesses, cette distribution devant être abandonnée aux lois du hasard. Or, si l'on considère en une région quelconque de l'Univers, par exemple à la surface de la Terre, un volume d'éther contenant un certain nombre de corps pondérables et limité aux dimensions des champs d'action sur lesquels portent ordinairement les expériences de Physique, notamment celles de Thermométrie, on pourra considérer ce volume, toujours très petit par rapport aux dimensions de l'Univers, comme également actionné en toutes ses parties par les forces extérieures émanées de l'ensemble de l'Univers (telles que, par exemple, celles du Soleil); les lois du hasard s'exerceront dans ces conditions dans l'éther enfermé à l'intérieur du volume considéré.

La théorie précédemment exposée s'appliquera donc ainsi aux atomes isolés plongés dans l'éther; son emploi sera rigoureux pour ceux des atomes isolés qui, limités à la surface d'impénétrabilité (S) définie, page 94 ci-dessus, peuvent être considérés individuellement comme assimilables à un ellipsoïde homogène (ou à quelque autre solide à trois plans de symétrie); il sera approximatif, ainsi qu'il a été expliqué (*loc. cit.*, p. 27-28), dans le cas où les atomes auraient des formes différant peu de celles de solides à trois plans de symétrie.

Lorsque les atomes sont juxtaposés, comme cela arrive pour les solides et les liquides, il y a plusieurs cas à distinguer : Si l'on prend un solide cristallisé contenant une, deux ou plusieurs espèces distinctes d'atomes pondérables disposés de telle façon que les plans des axes principaux relatifs au centre de gravité de l'un quelconque d'entre eux soient pour tous des plans de symétrie de distribution de la matière pondérable dans le voisinage de ces plans, la théorie sera rigoureusement applicable [sauf bien entendu pour les atomes (en très petit nombre relatif) qui sont voisins de la surface du cristal]. Si la con-

stitution du cristal ne peut se ramener au type qui vient d'être défini, la théorie ne sera qu'approximative. Reste à examiner le cas où le corps étudié est un solide amorphe ou un liquide. Considérons dans ce cas les trois plans des axes principaux passant par le centre de gravité d'un atome pondérable quelconque (M) du corps considéré; la théorie serait rigoureusement applicable si cet atome était isolé (en supposant, bien entendu, que les trois plans susvisés fussent, pour cet atome, des plans de symétrie); or, comme dans les corps amorphes solides et dans les liquides la matière est distribuée, selon les lois du hasard, suivant toutes les directions de l'espace, on conçoit que les actions exercées sur l'éther qui enveloppe l'atome (M) par les atomes contigus à celui-ci se contrebalancent de telle sorte que la symétrie dans les lois de distribution de l'éther par rapport aux plans principaux de l'atome M qui est requise pour légitimer l'application rigoureuse de la théorie ne soit pas considérablement altérée; la théorie pourra être alors regardée comme approximative.

Bref, on voit que les conditions d'application plus ou moins rigoureuse de la théorie varient suivant les corps de la nature; son degré d'approximation dépend, pour chaque corps, de la disposition relative des atomes constitutifs de celui-ci. Or on sait, d'autre part, que la loi de Dulong et Petit sur les chaleurs spécifiques, dont l'explication, comme on va le voir, constitue la plus importante des conséquences de ladite théorie, ne se vérifie pas avec le même degré d'approximation pour tous les corps de la Nature.

III. *Loi de Dulong et Petit en ce qui concerne l'énergie actuelle.* — Ces explications préliminaires données, considérons dans un espace limité (E) rempli d'éther un nombre indéterminé de corps qui pourront être les uns solides ou liquides, les autres gazeux, autrement dit en un état physique quelconque.

D'après la théorie exposée, *la valeur moyenne*

$$\frac{1}{T}\int_0^T (MW^2 + I\omega^2)\,dt$$

de la force vive totale contenue dans chaque atome pondérable devra,

quand l'équilibre dynamique du système sera établi, *être égale à une quantité* $\left[\text{la quantité } \frac{3}{2}\frac{\Sigma N m^2 \lambda^3}{\Sigma N m \lambda}\right.$ du second membre de l'équation (37) de la page 429 de notre précédente étude, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII$\left.\right]$ *qui est la même pour tous les atomes.*

Supposons que, sous l'effet d'une cause extérieure quelconque, un foyer de chaleur ou de froid par exemple, la quantité d'énergie accumulée dans l'espace (E) vienne à varier; alors l'équilibre du système sera troublé et, après une période d'agitation plus ou moins longue, un nouvel équilibre se produira. Quand ce nouvel équilibre sera réalisé, la valeur moyenne de la force vive totale contenue dans chaque atome pondérable sera encore la même pour tous Par conséquent, en désignant, pour simplifier l'écriture, par q la valeur de cette force vive moyenne dans le premier équilibre et par q' sa valeur dans le second, la différence algébrique $q' - q$, qui représente la quantité de la force vive moyenne gagnée ou perdue par chacun des atomes pondérables placés dans l'espace (E), sera la même pour tous ces atomes.

Si donc, conformément aux idées généralement admises et enseignées, on regarde la chaleur comme mesurée par la quantité de force vive accumulée sous forme d'énergie vibratoire dans les atomes pondérables, on voit que, au degré d'approximation que comporte la théorie ici présentée, *la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer ou refroidir également un atome pondérable est la même pour tous les atomes pondérables de la Nature.*

C'est là, on le sait, l'un des énoncés sous lesquels on présente ordinairement les lois de Dulong et Petit et de Neumann et Regnault sur les chaleurs spécifiques, en tant du moins qu'on ne considère dans la quantité de chaleur fournie à un corps que celle qui est employée à accroître le mouvement vibratoire de ses atomes constitutifs, autrement dit, à augmenter son *énergie actuelle.*

IV. *Loi de Dulong et Petit pour l'énergie totale.* — Mais il faut approfondir la question. Car, si la loi générale d'équilibre thermique ainsi établie peut, comme on sait, se vérifier directement pour les gaz simples (assimilés à des gaz parfaits) en montrant que le produit du poids atomique de chacun d'eux par sa chaleur spécifique est le même

pour tous, la même preuve expérimentale ne peut s'étendre immédiatement aux corps solides. Pour ces corps, en effet, il n'est pas possible de mesurer séparément l'énergie actuelle, et dans les expériences on obtient seulement la somme des variations de cette énergie et de la quantité qui, sous le nom d'*énergie potentielle,* représente le travail de résistance à l'écartement des forces attractives agissant entre les atomes.

Pour compléter la théorie en ce qui concerne les solides, nous allons en conséquence montrer que, lorsque les distances entre les atomes pondérables d'un solide s'approchent de leurs limites minima (c'est-à-dire quand, par suite d'un refroidissement suffisant, le solide se contracte autant qu'il lui est possible), *le rapport entre l'énergie actuelle et l'énergie potentielle du solide tend vers une limite qui ne dépend que du nombre de points de contact que, dans l'état de contraction maximum du solide, chaque atome a avec ses voisins* [1].

Pour le prouver, considérons en premier lieu, pour fixer les idées, un solide constitué par un assemblage d'atomes sphériques homogènes, tous identiques, placés de telle façon que, dans l'état de contraction maximum du solide, les atomes soient rangés comme les boulets d'une pile à base triangulaire; chaque atome touchera alors douze atomes pareils à lui-même et les centres des atomes formeront les sommets d'un réseau de tétraèdres réguliers juxtaposés. Le solide considéré est d'ailleurs regardé comme ayant des dimensions telles que, si on le coupe par un plan d'orientation quelconque passant par son centre de gravité, le nombre des atomes rencontrés par ce plan soit excessivement grand.

Nous appellerons *directions principales* les quatre directions respectivement parallèles aux quatre hauteurs de l'un quelconque des tétraèdres réguliers, tous parallèles, dont les sommets sont occupés par les centres des atomes, et *directions d'arêtes* les six directions respectivement parallèles aux arêtes de ces mêmes tétraèdres.

---

[1] La propriété qui va être ainsi établie peut être considérée comme correspondant, dans la présente théorie, à ce qu'est le théorème de Clausius sur le viriel (*Introduction à la théorie des explosifs,* par M. E. Sarrau, p. 76) dans la théorie de l'équilibre thermique des corps faite sans l'intervention des percussions.

Lorsque le solide est dans son état de contraction maximum, de telle façon que les atomes restent sans vitesses se touchant par leurs surfaces limitatives, le centre de tout atome peut être considéré comme soumis à douze forces attractives égales et opposées deux à deux, dirigées respectivement suivant les six directions d'arêtes qui se croisent en son centre; appelons F la valeur commune de l'une quelconque de ces douze forces; la quantité F a même valeur dans toute l'étendue du solide pour tout atome (sauf, bien entendu, pour les atomes qui sont très voisins de la surface limitative du solide, atomes dont nous ferons abstraction, dans les calculs qui suivent, en raison de leur très petit nombre relatif).

Supposons maintenant que le solide reçoive une quantité infiniment petite d'énergie distribuée également entre tous ses atomes, de façon que les vitesses du mouvement vibratoire produit soient également réparties suivant toutes les directions de l'espace; les atomes s'écarteront infiniment peu les uns des autres; un nouvel équilibre se produira; et, par raison de symétrie, cet équilibre sera tel que la valeur moyenne par rapport au temps de l'accroissement infiniment petit ε de la distance des centres de deux atomes contigus quelconques sera la même dans toute l'étendue du solide. Les forces F varieront infiniment peu, tant en grandeur qu'en direction (les droites joignant les centres des atomes étant à tout instant infiniment voisines, comme direction et longueur, de ce qu'elles sont dans l'état de contraction maximum).

Coupons le solide par un plan quelconque (P) perpendiculaire à l'une des directions principales. Ce plan partagera le solide en deux parties (ϖ) et (ϖ'); on sait, d'après un théorème bien connu, qu'il doit y avoir égalité entre la somme des projections sur la normale à (P) des impulsions totales, pendant un temps infiniment grand T, des forces attractives exercées par (ϖ') sur (ϖ) et la somme des percussions que, par suite des rencontres mutuelles des atomes en mouvement, la partie (ϖ') produit sur (ϖ) pendant le même temps T.

Évaluons ces percussions. Le solide étant infiniment peu déformé, les points sur lesquels se produisent les chocs des atomes sont toujours infiniment rapprochés, sur la surface desdits atomes, des points de contact dans l'état de contraction maximum. Considérons, sur l'un

quelconque des atomes (M) rencontré dans la partie (ϖ) du solide par le plan (P), le point de contact (dans l'état de contraction maximum) avec l'atome contigu (M′) de la partie (ϖ'); traçons en ce point la normale extérieure à l'atome (M). Si nous appelons l et l' les composantes des vitesses des atomes (M) et (M′) mesurées suivant cette normale extérieure au moment qui précède infiniment peu une rencontre des deux atomes, la percussion produite sur (M) par cette rencontre sera

$$M(l'-l),$$

M étant la valeur commune des masses des deux atomes égaux (M) et (M′).

Désignons maintenant par n le nombre des atomes de la partie (ϖ) rencontrés par le plan (P) qui, à une époque t quelconque, se trouvent avec la composante de vitesse l en face d'atomes de la partie (ϖ') animés de la vitesse l'. Appelons $\Sigma\varepsilon$ la somme des écarts (¹) simultanés relatifs à ces n atomes, les ε étant mesurés par rapport aux directions d'arêtes, lesquelles sont toujours infiniment voisines de celles des normales aux points de rencontre. Si entre deux chocs consécutifs quelconques la projection du mouvement des atomes sur les directions d'arêtes est uniforme (question qui sera examinée, p. 105 ci-après), le nombre des n atomes susdéfinis qui viendront se heurter pendant l'instant dt sera

$$n\frac{(l-l')\,dt}{\frac{\Sigma\varepsilon}{n}},$$

ou encore, en posant $\Sigma\varepsilon = n\eta$,

$$\frac{n(l-l')\,dt}{\eta};$$

car, pendant le temps dt, l'écart diminue de la quantité $(l-l')\,dt$, en sorte qu'il y a rencontre, pendant l'instant dt, entre tous les atomes

(¹) Nous appelons *écart* l'accroissement ε de la distance des centres de deux atomes contigus par rapport à ce qu'est cette distance dans l'état de contraction maximum.

pour lesquels l'écart, au commencement de l'instant dt, est au plus égal à $(l - l')\,dt$.

La somme des percussions produites pendant l'instant dt entre les n atomes considérés sera donc

$$\frac{n(l-l')\,dt}{\tau_1}\,\mathrm{M}(l'-l) = -\frac{n\,\mathrm{M}(l'-l)^2\,dt}{\tau_1}.$$

La projection de ces percussions sur la direction principale normale au plan (P) sera

$$-\frac{n\,\mathrm{M}(l'-l)^2\,dt\cos\alpha}{\tau_1},$$

α étant l'angle des directions d'arêtes et des directions principales, et la somme de ces projections pendant le temps T pourra, par suite, s'écrire, en développant le carré $(l'-l)^2$,

$$(1)\qquad -\frac{n\mathrm{T}\cos\alpha}{\tau_1}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,l'^2\,dt - \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,ll'\,dt + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,l^2\,dt\right).$$

Mais, quand (ce qui a lieu quand la température du solide est uniforme) l'énergie est également répandue dans toutes les parties du solide, on a, quels que soient les atomes considérés,

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,l'^2\,dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,l^2\,dt \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,ll'\,dt = 0,$$

cette dernière égalité résultant de ce que, chaque atome ayant son mouvement propre indépendant, les l sont par là même indépendants des l'.

L'expression (1) ci-dessus devient donc

$$-\frac{2n\mathrm{T}\cos\alpha}{\tau_1}\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,l^2\,dt.$$

Si l'on désigne maintenant par N le nombre des atomes de la partie (ϖ) du solide rencontrés par le plan (P), la somme analogue à (1)

pour l'ensemble de ces N atomes sera

$$(2)\qquad -\frac{3N.2nT\cos\alpha}{n\eta}\frac{1}{T}\int_0^T Ml^2\,dt = -\frac{6NT\cos\alpha}{\eta}\frac{1}{T}\int_0^T Ml^2\,dt,$$

attendu que dans l'état de contraction maximum il y a trois points de contact de chacun des atomes en question de (ϖ) avec ceux de (ϖ').

D'autre part, la somme des projections des impulsions totales sur la normale à (P) des forces attractives que (ϖ') exerce sur (ϖ) sera, pour la même durée de temps T,

$$(3)\qquad 3NFT\cos\alpha.$$

L'équilibre dynamique du système exige que les deux expressions (2) et (3) soient égales en valeur absolue, c'est-à-dire que

$$(4)\qquad \frac{2N}{\eta}\frac{1}{T}\int_0^T Ml^2\,dt = NF \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{T}\int_0^T Ml^2\,dt = F\eta.$$

Or, si l'on se rappelle que, page 101 ci-dessus, on a, par définition,

$$\Sigma\varepsilon = n\eta,$$

on voit que la quantité $F\eta$ est égale à

$$\frac{1}{n}F\Sigma\varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'elle mesure la valeur du travail exercé pour accroître la distance de deux atomes contigus quelconques de la moyenne $\frac{1}{n}\Sigma\varepsilon$ des écarts.

Ainsi donc l'équation d'équilibre (4) ci-dessus montre qu'à chacun des points de contact d'un atome avec ses voisins dans l'état de contraction maximum correspond, dans l'état d'équilibre dynamique du solide, une quantité d'énergie potentielle $F\eta$ égale au double de la quantité $\frac{1}{T}\int_0^T Ml^2\,dt$.

Mais, quand, comme c'est ici le cas, les vitesses des atomes sphériques sont à tout instant également réparties suivant toutes les directions de l'espace, la quantité $\frac{1}{T}\int_0^T M\,l^2\,dt$ est égale au tiers de l'énergie actuelle moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T M W^2\,dt$ contenue dans chaque atome sphérique. On a donc

$$(5)\qquad F\eta = \frac{2}{3}\,\frac{1}{T}\int_0^T M W^2\,dt.$$

D'autre part, avec la disposition en pile de boulets triangulaire définie page 99 ci-dessus, chaque atome touche douze de ses pareils. Par conséquent, en désignant par A le nombre des atomes du solide, l'énergie potentielle totale accumulée dans le solide sera

$$\frac{12\,AF\eta}{2},$$

le dénominateur 2 venant ici de ce que, dans la multiplication ainsi faite, chaque atome se trouve compté deux fois.

Or, d'après l'équation (5), on a

$$\frac{12\,AF\eta}{2} = 6\,AF\eta = 6\,A\cdot\frac{2}{3}\,\frac{1}{T}\int_0^T M W^2\,dt = \frac{4\,A}{T}\int_0^T M W^2\,dt.$$

Et comme $\frac{A}{T}\int_0^T M W^2\,dt$ est la quantité totale d'énergie actuelle contenue dans le solide, on voit que la limite du rapport entre l'énergie potentielle du solide et son énergie actuelle est, dans ce cas, égale à 4.

Avec un autre arrangement d'atomes, par exemple avec des atomes distribués suivant les sommets de cubes juxtaposés, de telle façon que chaque atome touche six de ses pareils, la limite du rapport en question serait $3\times\frac{2}{3}$, c'est-à-dire 2.

Mais, en tout cas, ce rapport est indépendant de la masse M des atomes et de l'intensité des forces qui les lient.

Et il résulte de là qu'il suffit de constater (dans les solides de même

structure atomique) l'égalité des variations d'énergie totale de chaque atome correspondant à un changement de température déterminé (égalité dont la loi de Dulong et Petit est précisément l'énoncé) pour en conclure (au degré d'approximation que comportent les considérations ici présentées) l'égalité des variations de l'énergie actuelle qui a par ailleurs été établie théoriquement, page 98 ci-dessus.

L'accord entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie se trouve donc réalisé.

V. *Action de l'éther.* — Le résultat auquel on arrive ainsi suppose, comme il a été remarqué page 101 ci-dessus, que, entre deux chocs consécutifs quelconques, le mouvement d'un quelconque des atomes est uniforme. Cette condition peut être considérée comme remplie lorsqu'on fait abstraction de l'éther puisque alors les forces F sont à tout instant infiniment voisines de ce qu'elles sont dans l'état de contraction maximum. Mais, quand on tient compte de l'éther, comme on doit le faire, la solution de la question apparaît moins nettement.

On peut, en tout cas, remarquer que l'action de l'éther sur les variations du mouvement des atomes entre les chocs consécutifs de ceux-ci est d'autant moins sensible que ces chocs sont plus fréquents et que, par suite, à égalité de vitesses [et par conséquent de température (1)], l'écart moyen η sera moindre; et, d'autre part, la relation (5), page 104, montre que η sera, dans ces conditions, d'autant plus petit que F sera plus grand. D'où l'on conclut que la théorie ici présentée est d'autant plus près d'être exacte en premier lieu que la température est plus basse (parce qu'alors le rapport entre les énergies potentielle et actuelle est plus près de sa limite), en second lieu, à égalité de température, que les forces F sont plus intenses, autrement dit, que les solides considérés sont plus rigides.

L'éther intervient par ailleurs pour établir et maintenir à tout in-

(1) Il résulte immédiatement de la présente théorie que la température d'un corps peut (au degré d'approximation que comporte la théorie) être regardée comme proportionnelle à son énergie totale, conformément aux idées généralement admises. (*Voir*, par exemple, l'*Introduction à la théorie des explosifs*, de M. E. Sarrau, § 117, p. 76).

stant l'uniformité de température dans toute l'étendue d'un même solide et entre solides distincts pour assurer l'égalité des énergies actuelles de tous les atomes (quantité q de la page 98 ci-dessus), et par suite déterminer, dans les variations de température, l'égalité pour tous les atomes de la variation de cette quantité q, conformément à la loi de Dulong et Petit.

VI. *Généralisation.* — Les considérations qui viennent d'être exposées pour le cas du solide à constitution très simple définie page 99 ci-dessus peuvent être généralisées.

Considérons un solide composé d'un nombre quelconque d'atomes de forme quelconque disposés d'une façon quelconque. Prenons dans l'état de contraction maximum deux atomes se touchant mutuellement. La composante F de la force d'attraction mutuelle de ces deux atomes suivant la normale en leurs points de contact est détruite par une réaction égale provenant de l'impénétrabilité des atomes. Quand le solide, ayant reçu une quantité d'énergie infiniment petite, se trouve infiniment peu sorti de son état de contraction maximum, la réaction qui équilibrait F n'existe plus puisque les atomes ne sont plus en contact permanent et cette réaction est remplacée par une suite de percussions dont la somme des impulsions pendant l'espace de temps infini T doit équilibrer celle de F. Or, en employant les notations des pages 405, 407 et 417 de notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII), la percussion produite par la rencontre de deux atomes est, d'après la dernière des formules (11) de notre page 405,

$$\frac{2(l'-l)}{\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}}.$$

La somme des percussions pendant le temps dt pour les rencontres qui se produisent entre les deux atomes considérés est alors égale, d'après ce qui a été expliqué pages 101 et suivantes ci-dessus, à

$$\frac{(l-l')\,dt}{\tau_1}\times\frac{2(l'-l)}{\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}}=-\frac{2(l'-l)^2\,dt}{\tau_1\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right)},$$

et, pendant le temps T, cette somme devient

$$(6)\qquad -2\frac{T}{r_1\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right)}\left[\frac{1}{T}\int_0^T l^2\,dt-\frac{2}{T}\int_0^T ll'\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T l'^2\,dt\right].$$

Mais, lorsque le mouvement des atomes se fait dans les conditions de nos précédentes études, on a (*Journal de Mathématiques*, 4[e] série, t. IX, p. 26)

$$\frac{1}{T}\int_0^T l^2\,dt=\frac{q}{6\mu},\qquad \frac{1}{T}\int_0^T l'^2\,dt=\frac{q}{6\mu'},$$

q désignant, comme page 98 ci-dessus, la quantité $\frac{3}{2}\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}$, et, par ailleurs, ainsi qu'il a été remarqué page 102 ci-dessus, $\frac{1}{T}\int_0^T ll'\,dt=0$.

L'expression (6) devient donc

$$-2\frac{T}{r_1\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right)}\times\frac{q}{6}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right)=-\frac{qT}{3r_1},$$

et, comme, d'après ce qui a été remarqué page 106 ci-contre, cette expression doit être égale à FT, on arrive finalement à la relation

$$(7)\qquad \frac{q}{3}=\frac{1}{3}\frac{1}{T}\int_0^T(MW^2+I\omega^2)\,dt=Fr_1,$$

qui n'est autre que la généralisation de l'équation (5) de la page 104 ci-dessus et qui, par suite, permet, comme elle, de rattacher par le raisonnement de la page 105, mais pour le cas d'atomes quelconques, la présente théorie à la loi expérimentale de Dulong et Petit.

VII. *Dilatation des solides.* — Les formules (5), p. 104, et (7) ci-dessus, ont une autre conséquence importante; elles montrent en effet toutes deux que pour un même solide quelconque l'écart moyen r_1 des atomes est proportionnel à la quantité d'énergie accumulée dans le solide, autrement dit à la température. On retrouve donc ainsi la loi expérimentale de la dilatation des solides.

Si, comme cela arrive dans les solides amorphes, les forces F agissant entre les atomes ont des valeurs égales suivant les diverses directions de l'espace, la dilatation se fera également dans tous les sens et le solide, en s'échauffant, restera semblable à lui-même. Lorsque, comme cela se produit pour les cristaux, les composantes des F sont plus grandes suivant certaines directions que selon d'autres, les composantes des écarts varient suivant ces directions en raison inverse des valeurs des composantes de F.

VIII. *Lois fondamentales de l'équilibre des gaz parfaits.* — Après avoir ainsi étudié les principales conditions de l'équilibre thermique des solides, considérons les corps pris à l'autre extrémité de l'échelle des températures, c'est-à-dire les *gaz parfaits*.

Les atomes devant, dans la présente théorie, demeurer constamment à distances excessivement petites de leurs positions moyennes, nous avons à montrer comment cette condition nécessaire permet d'expliquer les propriétés des gaz au moins aussi facilement que le fait la théorie dite *cinétique*, dans laquelle, comme on sait, les atomes sont considérés au contraire comme éprouvant des déplacements d'amplitude considérable.

Prenons un cylindre rigide fermé à une extrémité, ouvert à l'autre et rempli de gaz parfait. Le maintien du gaz dans le cylindre ne serait pas possible dans ces conditions; la moindre perturbation extérieure ferait en effet sortir du cylindre un certain nombre des atomes du gaz, et ces atomes, une fois dehors, ne rentreraient plus. Il faut donc, pour assurer l'équilibre du système, fermer l'extrémité ouverte du cylindre par une paroi solide inébranlable.

Soit Ω la surface d'un élément plan quelconque de cette paroi, élément que nous assimilerons d'abord à un plan idéal rigide identique à lui-même en toutes ses parties. Désignons, à un instant quelconque, par A le nombre d'atomes (de forme quelconque) identiques contenus dans l'unité de volume du gaz et orientés tous de la même façon avec les mêmes valeurs de vitesses en tous leurs points homologues.

Si l'un de ces atomes vient rencontrer l'élément Ω, il rebondira sur lui en produisant une percussion égale à $2\mu l$ (les notations étant les mêmes que p. 106 ci-dessus).

Le nombre de percussions identiques à celle-là qui se produisent sur l'aire Ω pendant l'intervalle dt sera en vertu d'un raisonnement déjà employé plusieurs fois, notamment en notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VII, p. 410),

$$A\Omega l\,dt$$

(nombre des atomes orientés de même façon et ayant les mêmes vitesses contenus dans un cylindre ayant Ω pour surface de base et $l\,dt$ pour hauteur).

La somme des $A\Omega l\,dt$ percussions ainsi produites est

$$2A\Omega\mu l^2\,dt.$$

Le total des percussions subies par l'élément Ω pendant l'espace de temps infiniment grand T est par suite

$$2\Omega\sum\left(\int_0^T A\mu l^2\,dt\right),$$

le signe $\sum$ portant sur l'ensemble des atomes contenus dans l'unité de volume du gaz.

Mais, quand le gaz est en état d'équilibre, les nombres A peuvent être considérés comme indépendants du temps. On a donc

$$\sum\left(\int_0^T A\mu l^2\,dt\right) = \sum A \times \int_0^T \mu l^2\,dt = \frac{1}{6}q\mathrm{T}\sum A,$$

q étant la quantité définie et employée p. 98 et 107 ci-dessus.

Si, par suite, on appelle P l'effort nécessaire pour maintenir en place l'élément Ω, on a l'équation d'équilibre

$$(8)\qquad \frac{2}{6}q\mathrm{T}\Omega\sum A = \mathrm{PT} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\mathrm{P}}{\Omega} = \frac{1}{3}q\sum A,$$

$\sum A$ désignant le nombre total d'atomes contenus dans l'unité de volume du gaz.

La pression $\frac{P}{\Omega}$ par unité de surface de la paroi est donc proportionnelle à la quantité q (c'est-à-dire à la température) et au nombre d'atomes $\sum A$ contenus dans l'unité du gaz. On retrouve ainsi l'expression bien connue de la pression des gaz donnée par la théorie cinétique.

Mais la formule (8) donne encore un autre résultat. On en tire, en effet

$$\sum A = \frac{3}{q}\frac{P}{\Omega}.$$

Or, la quantité q étant par sa définition indépendante de la nature du gaz, on voit que cette relation exprime qu'à égalité de température et de pression le nombre total $\sum A$ d'atomes contenus dans l'unité de volume d'un gaz quelconque est le même pour tous les gaz simples. C'est la loi bien connue d'*Avogadro et d'Ampère*, loi que la théorie cinétique n'explique pas ([1]) et qui ressort au contraire immédiatement, on le voit, de la théorie ici présentée.

Les considérations qui précèdent supposent (comme le fait la théorie cinétique) que, p. 108 ci-dessus, l'élément Ω soit assimilable à un plan idéal parfaitement rigide. En réalité de pareils plans n'existent pas dans la Nature et les parois de fermeture des enceintes sont constituées, comme tous les solides, d'atomes juxtaposés indépendants, en sorte que, pour établir la formule de la pression d'un gaz d'une façon absolument rigoureuse, il faudrait étudier toutes les actions se produisant entre les divers atomes du gaz et ceux des parois qui le contiennent. Mais il est vraisemblable que l'éther accumulé le long de ces parois

---

([1]) Verdet dit seulement à ce sujet : « Pour que dans le choc réciproque les vitesses ne changent pas, c'est-à-dire pour que l'état des deux gaz soit le même avant et après le mélange, il suffira que la force vive moyenne de chaque molécule soit la même pour les deux gaz (*Théorie mécanique de la chaleur*, t. II, p. 10-11) »; d'où il conclut (p. 12) la loi d'Avogrado et Ampère. Il revient sur cette question à peu près dans les mêmes termes aux pages 27 et 28 du même Ouvrage. Ces indications de Verdet, convenablement interprétées et développées, contiennent en germe la théorie exposée dans les présentes études.

forme comme une couche élastique dont l'effet est tel que le mouvement de tout atome du gaz se rapprochant de l'une des parois peut être représenté approximativement par celui que produirait une force de percussion naissant à la rencontre de cet atome et de la paroi. S'il n'en était pas ainsi, la valeur de la pression d'un gaz dépendrait (ce qui n'est pas, l'expérience le montre) de la nature des parois de son enveloppe.

Bref, la théorie ici présentée permet d'expliquer les propriétés des gaz parfaits aussi bien que la théorie cinétique et a en outre les avantages suivants.

1° Par l'emploi des formules établies en nos précédentes études, elle fait intervenir la notion nécessaire de la résistance que l'éther apporte aux déplacements rectilignes des atomes;

2° Elle explique la loi d'Avogadro et d'Ampère.

Il y a lieu par ailleurs de noter qu'elle s'applique non pas seulement à des atomes sphériques, mais encore aux atomes de formes très variées rentrant dans les catégories définies aux pages 24 à 28 de notre seconde étude (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX).

Il est à remarquer que la relation (8), établie page 109 ci-dessus, est indépendante de l'amplitude d'oscillation des atomes pondérables, et, par suite, exacte quelque petite que soit cette amplitude.

IX. *Postulatum du principe de Carnot.* — Il est maintenant une question qui vient de suite à l'esprit, c'est de savoir si la théorie présentée permet de rendre compte du postulatum du principe de Carnot, à savoir que le transport de chaleur, sans consommation de travail extérieur, entre corps de températures différentes se fait toujours du corps le plus chaud au corps le plus froid et jamais en sens inverse.

Il serait bien facile de faire voir que les formules données justifient ce postulatum. Mais il y a lieu de remarquer que la question demande à être traitée de plus près. Les formules établies ci-dessus ne sont en en effet qu'approximatives comme aussi les lois expérimentales qu'elles représentent. Le postulatum du principe de Carnot énonce au contraire un fait rigoureusement exact.

Or, sans entrer dans aucun détail de calcul, on voit en réfléchissant

aux bases des présentes études que les forces répulsives qui agissent entre l'éther et les atomes pondérables (forces que nous avons assimilées à des percussions) satisfont certainement à la condition que voici : Lorsqu'un atome pondérable se trouve en état d'équilibre dynamique au sein d'une masse d'éther, si, par suite d'une cause accidentelle quelconque, sa force vive totale vient à augmenter, immédiatement les forces répulsives émanées de l'éther agissent pour diminuer la force vive momentanément accrue et la ramener au taux normal : en sens inverse, si la force vive de l'atome tombe au-dessous de ce taux, l'effet desdites forces répulsives est d'accroître la force vive pour la ramener à ce qu'elle doit être. C'est ce que nous avons déjà fait remarquer au commencement de notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 400).

Quand donc on met en présence des atomes pondérables pris à des températures différentes, l'action de la masse d'éther qui les enveloppe tous consiste à prendre de la force vive aux atomes les plus chauds et à en donner aux atomes les plus froids jusqu'à ce que l'équilibre dynamique de tout le système soit établi. Les transports de chaleur se font bien, par conséquent, dans le sens indiqué par le postulatum du principe de Carnot [1].

Ces considérations peuvent en outre être invoquées pour rattacher la conception de la température résultant de la présente théorie à la définition qu'en a donnée M. Félix Lucas dans sa très intéressante Notice : *La solution du problème des températures* (Gauthier-Villars, 1887).

X. *Loi de Newton sur le refroidissement des solides.* — Nous examinerons une dernière question qui sera de montrer que la théorie présentée est d'accord avec la loi de Newton sur la vitesse du refroidissement des corps.

Si l'on réfléchit à la manière dont ont été établies dans le cours des

---

[1] *Voir*, à titre de rapprochement, la Note S des *Leçons sur la théorie mécanique de la chaleur* de Verdet, t. I, p. CXXIX. Le postulatum du principe de Carnot s'y trouve expliqué, à peu près de la même façon, au moyen de la considération d'atmosphères jouant un rôle analogue à celui attribué ici à l'éther.

présentes études les conditions de l'équilibre dynamique des atomes pondérables placés dans une atmosphère d'éther, on reconnaît que cet équilibre réside au fond dans le fait d'une série indéfinie de petites oscillations de la force vive de chaque atome, oscillations dans lesquelles cette force vive est tantôt plus grande, tantôt plus petite que sa valeur moyenne, à laquelle l'éther la ramène constamment dès qu'elle s'en écarte un peu.

Cela posé, considérons seulement, pour simplifier, un atome pondérable sphérique et partons de la formule (26) de la page 420 de notre première étude

$$\sum_2 v = \left(-\frac{2}{3}\, lt \sum N m\lambda^2 - 2 l^2 t \sum N m\lambda + \frac{t}{2\mu} \sum N m^2\lambda^3\right) d\sigma.$$

Faisons la sommation des formules analogues à un même instant pour tous les $d\sigma$ de la surface de l'atome. Remarquons que, dans le cas des atomes sphériques, les quantités $\sum N m\lambda^2$, $\sum N m\lambda$ ayant même valeur en tous points de la surface d'un même atome, on a

$$\int l\, d\sigma = 0, \qquad \int l^2\, d\sigma = \frac{S}{3}\, W^2,$$

les notations étant celles définies aux pages 406, 407, 421 et employées page 423 de notre première étude.

Dans ces conditions, si l'on désigne par le symbole $\sum v$ la somme des variations v obtenues, il vient

$$\sum v = -\frac{2 t S W^2}{3} \sum N m\lambda + \frac{tS}{2M} \sum N m^2\lambda^3,$$

μ étant, pour les atomes sphériques, égal à M.

Cette formule donne l'expression de $\sum v$ pendant le temps t durant lequel l'atome sphérique, se trouvant d'ailleurs en état d'équilibre dynamique au sein de l'éther, possède une certaine valeur déterminée de vitesse de translation W.

Quand l'atome n'est pas en état d'équilibre dynamique, ladite formule n'est plus applicable. Mais si l'état de l'atome est voisin de son état d'équilibre dynamique, la véritable formule donnant le $\sum c$ sera, par raison de continuité,

$$\sum c = -\frac{2tSW^2}{3}\sum Nm\lambda + \frac{tS}{2M}\sum Nm^2\lambda^3 + \eta t,$$

η étant un petit coefficient qui devient nul lorsque l'atome est en équilibre dynamique et qui, par suite, pour les états voisins de l'équilibre dynamique, aura des valeurs très petites de manière à mettre ces états en continuité avec les états oscillatoires dont la succession, comme il a été remarqué page 113 ci-dessus, constitue l'équilibre dynamique.

On pourra donc, en négligeant le très petit produit ηt pour les états voisins de l'équilibre dynamique et remarquant que, si l'espace de temps t devient infiniment petit et égal à dt, la variation $\sum c$ n'est autre chose que la différentielle $2MW\,dW$ de l'énergie de l'atome, écrire

$$(9)\qquad MW\frac{dW}{dt} = -\frac{SW^2}{3}\sum Nm\lambda + \frac{S}{4M}\sum Nm^2\lambda^3.$$

Appelons MW_0^2 la valeur moyenne de l'énergie de l'atome dans le cas de l'équilibre dynamique; on a, d'après la formule (29) de la page 423 de notre première étude

$$MW_0^2 = \frac{3}{4}\frac{\Sigma Nm^2\lambda^3}{\Sigma Nm\lambda},$$

en sorte que l'équation (9) peut se mettre sous la forme

$$MW\frac{dW}{dt} = \frac{1}{3}(-W^2 + W_0^2)S\sum Nm\lambda = H(W_0^2 - W^2),$$

en posant $\frac{1}{3}S\sum Nm\lambda = H$, et elle donne par intégration

$$M(W^2 - W_0^2) = Ce^{-\frac{2Ht}{M}},$$

C désignant une constante.

La loi de la variation $M(W^2 - W_0^2)$ de la quantité d'énergie calorifique accumulée dans les atomes pondérables en fonction du temps t est donc bien la même que celle exprimée par la formule de Newton sur le refroidissement des solides à basse température.

XI. *Résumé.* — En résumé, la théorie qui vient d'être présentée rend compte de :

1° La loi de Dulong et Petit sur les chaleurs spécifiques pour les solides à basse température ;

2° La loi de la dilatation des solides à basse température ;

3° Les lois de la pression dans les gaz parfaits ;

4° La loi d'Avogadro et Ampère dans les gaz parfaits ;

5° Le postulatum du principe de Carnot ;

6° La loi de Newton sur le refroidissement des solides à basse température.

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires;

PAR M. ERNEST LINDELÖF.

La présente étude a pour but de donner une exposition succincte de la méthode d'approximations successives de M. Picard en tant qu'elle s'applique aux équations différentielles ordinaires ([1]). Je commence par démontrer, d'une manière très simple, qu'il ne peut y avoir qu'un seul système d'intégrales de nos équations prenant des valeurs initiales données. Les conditions dans lesquelles je me place sont assez générales; ainsi je ne suppose pas l'existence des dérivées des fonctions qui figurent dans les seconds membres (les équations étant réduites à la forme normale). Puis j'expose la méthode de M. Picard avec la modification que j'y ai apportée dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences (séance du 26 février 1894). A la fin j'applique la méthode exposée à la démonstration d'un théorème connu de M. Poincaré concernant les équations différentielles dépendant d'un paramètre arbitraire.

([1]) E. PICARD, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Chap. V (*Journal de Mathématiques* et *Journal de l'École Polytechnique*, 1890).

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires, Chap. I (*Journal de Mathématiques*, 1893).

1. Considérons le système des équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Nous supposons que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient finies et continues pour les valeurs *réelles* de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ comprises dans les intervalles

$$(2)\quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a; \qquad |y_i - y_i^0| \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

a et b étant deux nombres positifs. De plus, on aura, pour

$$|y_i' - y_i^0| < b,$$

$x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ restant dans les mêmes intervalles,

$$(3)\quad \begin{cases} |f_i(x, y_1', y_2', \ldots, y_n') - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \\ \quad < k_1|y_1' - y_1| + k_2|y_2' - y_2| + \ldots + k_n|y_n' - y_n| \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ étant des nombres positifs.

Nous allons d'abord démontrer qu'il ne peut exister qu'un système d'intégrales des équations (1), continues dans un intervalle

$$x_0 \text{---} x_0 + \rho \quad (\rho \leqq a),$$

et prenant les valeurs $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ pour $x = x_0$.

Supposons, en effet, qu'il existe deux tels systèmes d'intégrales

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_n \quad \text{et} \quad Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n.$$

Posons

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \varphi_i(x),$$

$$\frac{dZ_i}{dx} = f_i(x, Z_1, Z_2, \ldots Z_n) = \psi_i(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\varphi_i(x) - \psi_i(x) = \Phi_i(x).$$

Les fonctions $\Phi_i(x)$ seront continues dans un certain intervalle $x_0 — x_0 + \rho_1 (\rho_1 \leqq \rho)$, et s'annuleront pour $x = x_0$. Il en sera de même de la fonction

$$\Psi(x) = |\Phi_1(x)| + |\Phi_2(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|.$$

Or, considérons le quotient

$$Q(x) = \frac{\Sigma_i |f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) - f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n)|}{|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| + \ldots + |Y_n - Z_n|}.$$

On aura, d'après les inégalités (3),

$$Q(x) < n \frac{k_1 |Y_1 - Z_1| + k_2 |Y_2 - Z_2| + \ldots + k_n |Y_n - Z_n|}{|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| + \ldots + |Y_n - Z_n|},$$

ou encore, en désignant par K le produit par n du plus grand des nombres k_i,

$$Q(x) < K,$$

inégalité qui aura lieu pour $x_0 < x < x_0 + \rho_2 (\rho_2 \leqq \rho_1)$.

D'autre part nous aurons, d'après la notation adoptée,

$$Q(x) = \frac{|\Phi_1(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|}{\left|\int_{x_0}^{x} \Phi_1(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_0}^{x} \Phi_n(x)\,dx\right|}$$

$$\geqq \frac{|\Phi_1(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|}{\int_{x_0}^{x} [|\Phi_1(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|]\,dx},$$

ou bien

$$Q(x) \geqq \frac{\Psi(x)}{\int_{x_0}^{x} \Psi(x)\,dx}.$$

Soit Δ une quantité positive plus petite que $\frac{1}{K}$ et ρ_2, ε la plus grande valeur de la fonction $\Psi(x)$ dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \Delta)$ et $x_0 + \Delta_1 (\Delta_1 \leqq \Delta)$ la valeur de x correspondant à ce maximum. On aura

$$Q(x_0 + \Delta_1) \geqq \frac{\varepsilon}{\int_{x_0}^{x_0+\Delta_1} \Psi(x)\,dx} > \frac{\varepsilon}{\varepsilon\Delta_1} \geqq \frac{1}{\Delta},$$

ou encore

$$Q(x_0 + \Delta_1) > K,$$

ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu plus haut. Donc il ne peut exister qu'un seul système d'intégrales de (1) satisfaisant aux conditions posées. C. Q. F. D.

2. Considérons toujours le système (1), en faisant sur les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les mêmes hypothèses qu'au début du numéro précédent. Pour former effectivement les intégrales de ce système qui se réduisent à $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ pour $x = x_0$, on aura, d'après la méthode de M. Picard, à former n suites de fonctions

$$y_i^1, \quad y_i^2, \quad \ldots, \quad y_i^h, \quad \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

définies par les formules

$$\begin{aligned}
\frac{dy_i^1}{dx} &= f_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0),\\
\frac{dy_i^2}{dx} &= f_i(x, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dy_i^h}{dx} &= f_i(x, y_1^{h-1}, y_2^{h-1}, \ldots, y_n^{h-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les constantes d'intégration étant déterminées en sorte qu'on ait,

pour $x = x_0$,

$$y_i^k = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots \infty).$$

Posons, d'une manière générale,

$$u_i^k = y_i^k - y_i^{k-1} = \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1^{k-1}, \ldots, y_n^{k-1}) - f(x, y_1^{k-2}, \ldots, y_n^{k-2})]\, dx,$$

et considérons les séries

$$(4) \qquad Y_i = y_i^0 + u_i^1 + u_i^2 + \ldots + u_i^k + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura successivement, en désignant par M_0 la plus grande valeur absolue des fonctions $f_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u_i^1| = \left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)\, dx \right| \\ \qquad < M_0(x - x_0), \\ |u_i^2| < \displaystyle\int_{x_0}^{x} [k_1 |u_1^1| + k_2 |u_2^1| + \ldots + k_n |u_n^1|]\, dx \\ \qquad < M_0(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \dfrac{(x - x_0)^2}{2!}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |u_i^k| < \displaystyle\int_{x_0}^{x} [k_1 |u_1^{k-1}| + k_2 |u_2^{k-1}| + \ldots + k_n |u_n^{k-1}|]\, dx \\ \qquad < M_0(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)^{k-1} \dfrac{(x - x_0)^k}{k!}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Ces inégalités subsisteront tant que les courbes y_i^k resteront comprises dans les intervalles (2), soit pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho\, (\rho \leqq a)$. Pour ces valeurs de x les séries (4) seront uniformément convergentes, leurs termes successifs étant plus petits que ceux de la série exponentielle

$$\frac{M_0}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \sum \frac{[(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(x - x_0)]^i}{1 . 2 \ldots i}.$$

Il s'ensuit que, dans ledit intervalle de x, ces séries représentent

les intégrales cherchées du système (1). On aura, en effet, à partir d'une certaine valeur K de k,

$$|Y_i - y_i^k| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où

$$\left| \int_{x_0}^{x} \{ f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) - f_i(x, y_1^k, \ldots, y_n^k) \} dx \right|$$
$$< \varepsilon (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(x - x_0),$$

ε étant une quantité positive si petite qu'on voudra. De l'identité

$$y_i^{k+1} - y_i^0 = \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^k, \ldots, y_n^k) dx$$

on pourra donc tirer l'inégalité suivante

$$\left| Y_i - y_i^0 - \int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) dx \right| < \varepsilon [1 + (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\rho],$$

qui aura lieu dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \rho)$ de x et pour $k > K$. Le premier membre étant indépendant de K et pouvant d'autre part, pour des valeurs assez grandes de K, être rendu plus petit qu'une quantité positive quelconque, quelque petite qu'elle soit, il s'ensuit qu'on aura identiquement

$$Y_i = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) dx,$$

d'où

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ représentent donc bien les intégrales cherchées du système (1) lorsque x reste dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \rho)$.

(C. Q. F. D.).

3. Occupons-nous maintenant du domaine de convergence des séries que nous venons de former. Il s'agit de trouver une expression pour la quantité désignée plus haut par ρ.

On voit d'abord immédiatement qu'on pourra mettre $\rho = \rho_1$, ρ_1 étant la plus petite des deux quantités

$$a \quad \text{et} \quad \frac{b}{M},$$

où M désigne la valeur absolue maxima des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dans les intervalles (2). On aura en effet, pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_1$,

$$|y_i^k - y_i^0| \leqq M\rho_1 \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

On peut encore choisir $\rho = \rho_2$, en désignant par ρ_2 la plus petite des deux quantités

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \log\left[1 + \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\, b}{M_0}\right].$$

Il suit, en effet, des inégalités (5) qu'on aura

$$|y_i^k - y_i^0| < b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tant que la quantité

$$M_0(x - x_0) + M_0 K \frac{(x - x_0)^2}{2!} + M_0 K^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \ldots$$
$$= \frac{M_0}{K}\left[e^{K(x - x_0)} - 1\right] \qquad (K = k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$$

restera inférieure ou égale à b, ce qui a certainement lieu pour

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_2.$$

Il est bien évident que ρ_2 est, dans certains cas, plus grand que ρ_1.

Remarque. — Au lieu de choisir, comme première approximation, les valeurs initiales $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, on pourra partir de n courbes continues quelconques

$$\overline{y}_1^0, \quad \overline{y}_2^0, \quad \ldots, \quad \overline{y}_n^0,$$

pourvu que, pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, elles soient comprises tout entières dans le domaine (2), et que les fonctions

$$f_i(x, \overline{y}_1^0, \overline{y}_2^0, \ldots, \overline{y}_n^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

soient intégrables dans le même intervalle de x. Les deux expressions que nous venons de trouver pour le domaine de convergence des séries (4) seront encore valables pour les nouvelles séries, à cette différence près qu'on aura à remplacer M_0 par la valeur absolue maxima des fonctions

$$f_i(x, \overline{y}_1^0, y_2^0, \ldots, \overline{y}_n^0)$$

pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$.

4. On peut indiquer des cas étendus où le domaine de convergence des séries (4) est encore plus large. Ainsi, considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

la fonction $f(x, y)$ étant finie, continue et positive pour $x_0 \leqq x < x_1$, y ayant une valeur finie quelconque; de plus, dans les mêmes intervalles, $f(x, y)$ va toujours en décroissant lorsque y croît; enfin, à tout domaine fini compris entre les droites $x = x_0$ et $x = x_1 - \varepsilon$, ε étant une quantité positive si petite qu'on voudra, il correspond un nombre positif k tel qu'on ait

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k\,|y' - y|,$$

les points (x, y') et (x, y) restant intérieurs à ce domaine.

Ces conditions supposées remplies, *la série*

$$y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_k - y_{k-1}) + \ldots,$$

fournie par la méthode des approximations successives, sera uniformément convergente dans l'intervalle $(x_0 — x_1 - \varepsilon)$, *quelque petite que soit la quantité positive* ε.

En effet, on aperçoit facilement que, dans l'intervalle $(x_0 — x_1 - \varepsilon)$, les courbes $y_2, y_3, \ldots$ seront tout entières comprises entre les deux courbes y_0 et y_1, finies et continues elles-mêmes dans ledit intervalle. Il existe donc un nombre k valable pour toutes ces valeurs de x; c'est le nombre k relatif à l'aire comprise entre y_0, y_1 et la droite $x = x_1 - \varepsilon$. La démonstration s'achève comme dans le n° **2**.

Il en est de même si la fonction $f(x, y)$, au lieu de décroître, va toujours en croissant lorsque y croît, pourvu que l'intégrale dont il s'agit soit finie et continue dans l'intervalle $(x_0 — x_1 - \varepsilon)$, ε étant une quantité positive si petite qu'on voudra.

5. Pour terminer, je vais appliquer la méthode des approximations successives à la démonstration d'un théorème de M. Poincaré ([1]). Cette application a déjà été faite par M. Picard ([2]). Seulement, en faisant usage de la seconde limite de convergence que j'ai introduite dans le n° **5**, je pourrai éviter une transformation dont se sert M. Picard pour se débarrasser des termes du premier ordre.

Théorème. — *Considérons le système des équations différentielles*

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où μ désigne un paramètre arbitraire, et soient

$$x_1 = \theta_1(t), \qquad x_2 = \theta_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \theta_n(t)$$

les intégrales s'annulant avec t de ce système, lorsqu'on y fait $\mu = 0$. Nous supposons que les fonctions $\theta_i(t)$ soient finies et continues lorsque t reste dans l'intervalle

$$(7) \qquad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

et que, pour les mêmes valeurs de t, les f_i soient développables en séries suivant les puissances entières et positives de

$$\mu, \quad x_1 - \theta_1(t), \quad x_2 - \theta_2(t), \quad \ldots, \quad x_n - \theta_n(t).$$

Admettons que, pour $t = t_1$, ces séries sont convergentes lorsque

$$|\mu| < P(t_1), \qquad |x_i - \theta_i(t)| < Q(t_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

([1]) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 58-61.

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 9 avril 1894.

Il nous faut supposer encore que, lorsque t_1 varie depuis zéro jusqu'à t_0, $P(t_1)$ et $Q(t_1)$ aient des limites inférieures, ρ et r, différentes de zéro [1].

Ces conditions supposées remplies, *les intégrales de* (6) *s'annulant pour* $t=0$ *seront développables en séries suivant les puissances entières et positives de* μ, *ces séries étant convergentes lorsque* $|\mu|$ *reste au-dessous d'une certaine limite,* t *ayant une valeur quelconque dans l'intervalle* (7).

Effectuons un changement de fonctions, en posant

$$x'_i = x_i - \theta_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Les x'_i satisferont aux équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx'_i}{dt} &= f_i[x'_1+\theta_1(t), \ldots, x'_n+\theta_n(t), \mu, t] - f_i[\theta_1(t), \ldots, \theta_n(t), 0, t] \\ &= \bar{f}_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \mu, t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n); \end{aligned}$$

les $\bar{f}_i$ seront développables en séries suivant les puissances entières et positives de μ, x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_n, ces séries étant convergentes pour

$$|\mu| < \rho, \qquad |x'_i| < r \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

t ayant une valeur quelconque dans l'intervalle (7); d'ailleurs les fonctions $\bar{f}_i$ s'annuleront identiquement lorsqu'on y fait

$$\mu = x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = 0.$$

Soient ρ_1 et r_1 deux nombres positifs plus petits respectivement

---

(1) Il est facile de former des fonctions f_i pour lesquelles cette dernière condition n'est pas remplie. Ainsi, par exemple, la fonction

$$(t_0 - 2t)\left(1 - \frac{\mu + x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{t_0 - 2t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est bien développable suivant les puissances de μ, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, t ayant une valeur quelconque dans l'intervalle (7), mais le domaine où converge cette série tend vers zéro lorsque t tend vers $\frac{t_0}{2}$.

que ρ et r, et désignons par $M(\rho')$ la valeur absolue maxima des fonctions

$$\overline{f}_i(0, 0, \ldots, 0, \mu, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour

$$|\mu| \leqq \rho' (\leqq \rho_1), \qquad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

et par k_i la valeur absolue maxima des dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \overline{f}_j(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \mu, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

pour les valeurs des variables comprises dans les intervalles

$$|x'_i| \leqq r_1, \qquad |\mu| \leqq \rho_1, \qquad 0 \leqq t \leqq t_0.$$

On aura alors les inégalités

$$\begin{gathered}\left|\overline{f}_i(\overline{x}'_1, \ldots, \overline{x}'_n, \mu, t) - \overline{f}_i(x'_1, \ldots, x'_n, \mu, t)\right| \\ \leqq k_1 \left|\overline{x}'_1 - x'_1\right| + \ldots + k_n \left|\overline{x}'_n - x'_n\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),\end{gathered}$$

les variables restant dans les intervalles considérés.

Cela posé, appliquons la méthode des approximations successives à la recherche des intégrales du système

$$\frac{dx'_i}{dt} = \overline{f}_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \mu, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui s'annulent avec t. On aura à poser

$$\begin{gathered}x_i^k = \int_0^t \overline{f}_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}, \mu, t) \\ (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty),\end{gathered}$$

en observant que $x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = 0$.

Alors, d'après le n° **5**, les séries

$$\begin{gathered}\varphi_i(\mu, t) = x_i^1 + (x_i^2 - x_i^1) + \ldots + (x_i^k - x_i^{k-1}) + \ldots \\ (i = 1, 2, \ldots, n)\end{gathered}$$

seront uniformément convergentes et représenteront les intégrales cherchées pour les valeurs de μ et de t comprises dans les intervalles

$$|\mu| < \rho' (\leqq \rho_1), \qquad 0 \leqq t \leqq t',$$

t' désignant la plus petite des deux quantités

$$(8) \qquad t_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \log\left[1 + \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) r_1}{M(\rho')}\right].$$

Or, $M(\rho')$ tendra évidemment vers zéro en même temps que ρ'. Dès lors, il existe un nombre ρ_2 tel que, pour $\rho' < \rho_2$, la seconde des limites (8) sera plus grande que la première et, par suite, on pourra affirmer que les séries $\varphi_i(\mu, t)$ convergent uniformément dans tout l'intervalle $0 — t_0$, pourvu qu'on ait $|\mu| < \rho_2$. Les termes de ces séries étant d'ailleurs des fonctions holomorphes de μ pour $|\mu| < \rho$, on en conclut, en se reportant à un théorème bien connu de M. Weierstrass [1], que les fonctions $\varphi_i(\mu, t)$ et, par suite, les intégrales cherchées du système (6), sont développables en séries suivant les puissances entières et positives de μ, ces séries étant convergentes pour $|\mu| < \rho_2$, la variable t ayant une valeur quelconque dans l'intervalle $(0 — t_0)$. C. Q. F. D.

---

[1] *Abhandlungen aus der Funktionenlehre* (Berlin, 1886), p. 73.

Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences) ;

PAR M. R. PERRIN.

---

1. Soient U la forme binaire générale d'ordre n, et $V = 0$ l'équation aux carrés des différences des racines de U. On sait que chacun des coefficients de V est la source d'un certain covariant de U. Le degré de V étant $m = \frac{n(n-1)}{2}$, il existe ainsi m covariants liés respectivement au second, au troisième, etc., au dernier terme de V; le dernier se réduit d'ailleurs, comme on sait, au discriminant de U, et le premier au hessien. Je me propose, dans le présent travail, d'étudier en particulier celui de ces covariants de U qui est lié à l'*avant-dernier* terme de V, et que je désignerai par ce motif sous le nom de *sous-discriminant* de la forme binaire : après avoir établi d'une manière générale les propriétés de ce covariant, j'indiquerai une méthode spéciale pour le calculer en partant du discriminant supposé connu, et pour trouver rapidement son expression en fonction des covariants simples, pourvu que l'on connaisse la chaîne des syzygies qui relient le discriminant lui-même aux $n-1$ covariants principaux (associés à la forme). Je ferai l'application de cette méthode aux formes binaires des troisième, quatrième, cinquième et sixième ordres, en insistant plus spécialement sur le cas de la forme du cinquième ordre, où la

considération du sous-discriminant conduit, comme on le verra, à plusieurs conséquences nouvelles et intéressantes.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU SOUS-DISCRIMINANT.

2. *Le sous-discriminant de la forme binaire d'ordre n est un covariant du quatrième ordre par rapport aux variables, et du degré $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de la forme.*

Cette propriété découle immédiatement de la proposition suivante, facile à établir :

Le covariant lié au $p+1^{\text{ième}}$ terme de l'équation aux carrés des différences des racines de la forme d'ordre n, est de degré $2p$ par rapport aux coefficients de la forme, et d'ordre $2p(n-2)$ par rapport aux variables, si $p \leqq n-1$; de degré $2(n-1)$ et d'ordre $4(m-p)$, si $p \geqq n-1$.

En effet, la source de ce covariant étant la somme des produits p à p des m carrés des différences des racines, l'une quelconque des racines figure, dans l'un au moins des produits, au degré $2p$, si $p \leqq n-1$, et au degré $2(n-1)$, si $p \geqq n-1$, comme combinée par différence avec chacune des $n-1$ autres racines; d'après un théorème connu, le degré par rapport aux coefficients de la forme est donc aussi $2p$ ou $2(n-1)$. Le poids de la même expression est d'ailleurs évidemment dans tous les cas $2p$. Mais l'ordre du covariant d'une forme de degré n, dont la source est de degré δ et de poids π, est fourni, comme on sait, par la formule $n\delta - 2\pi$; ce qui conduit à la proposition énoncée ci-dessus.

Ainsi, dans l'équation aux carrés des différences, l'ordre des covariants liés aux termes successifs commence par croître de $2(n-2)$, en partant du premier terme dont le coefficient est l'unité, et du second dont le coefficient est la source du covariant hessien, jusqu'au terme de rang n pour lequel l'ordre du covariant atteint sa valeur maxima $2(n-1)(n-2)$; l'ordre décroît ensuite par 4 unités jusqu'à

l'avant-dernier terme (de rang m) qui fournit le sous-discriminant, covariant biquadratique, et au dernier qui fournit le discriminant, invariant de la forme.

Il est donc possible, étant donnée une forme binaire d'ordre quelconque, de la transformer par substitution linéaire, par la résolution d'une seule équation du quatrième degré, de manière à annuler la somme des inverses des carrés des différences de ses racines.

3. *Si une forme binaire admet un facteur carré et un seul, le sous-discriminant de cette forme se réduit à la quatrième puissance de ce facteur.*

En effet dans ce cas le discriminant est nul, l'équation aux carrés des différences a une racine nulle. Effectuons une transformation linéaire en prenant pour nouvel y un des facteurs linéaires du sous-discriminant : la source de ce covariant devra s'annuler, l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences disparaîtra comme le dernier; cette équation aura donc deux racines nulles, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'un seul facteur carré dans la forme binaire. La transformation linéaire considérée est donc impossible : ce qui exige que tout facteur du sous-discriminant soit aussi un facteur de la forme. Mais, par raison de symétrie, si un facteur simple de la forme est un facteur du sous-discriminant, il faut qu'il en soit de même de tout autre facteur simple : ce qui est évidemment impossible pour $n > 6$. Donc enfin le facteur double de la forme est le seul facteur du sous-discriminant, et il y entre à la quatrième puissance.

Nous vérifierons directement qu'il en est bien ainsi pour $n = 3$, 4 et 5.

4. *Si une forme binaire admet un facteur triple, quadruple, etc., ou au moins deux facteurs carrés, le sous-discriminant s'évanouit identiquement.*

En effet, dans ces divers cas, l'équation aux carrés des différences admet au moins deux racines nulles, et le coefficient de son avant-dernier terme doit rester constamment nul, de quelque manière qu'on

transforme linéairement les variables. Le sous-discriminant devrait donc rester constamment divisible par y, ce qui revient à dire qu'il est identiquement nul.

5. *Le sous-discriminant s'exprime, en fonction des racines* α_1, α_2, ..., α_n *de la forme binaire, par la formule*

$$(1) \qquad w = \sum_{r,s} \delta_{rs}^2 (x - \alpha_r y)^2 (x - \alpha_s y)^2,$$

où δ_{rs} *désigne le produit des* $m - 1$ *différences de racines autres que* $\alpha_r - \alpha_s$, *et où le signe de sommation* $\sum$ *s'applique à toutes les combinaisons possibles de valeurs, depuis* 1 *jusqu'à* n, *données à* r *et* s.

En effet l'expression (1) représente bien un covariant, puisque toutes les racines α y figurent au même degré $2(n-1)$. Ce covariant est du quatrième ordre, et sa source (coefficient de x^4) se réduit bien à $\sum_{r,s} \delta_{rs}^2$, coefficient de l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences; c'est donc bien le sous-discriminant.

L'expression (1) rend évidentes les propriétés précédemment démontrées pour le sous-discriminant. Si $\alpha_1 = \alpha_2$ par exemple, tous les δ autres que δ_{12} s'annulent comme renfermant $\alpha_1 - \alpha_2$, et w se réduit à $\delta_{12}^2 (x - \alpha_1 y)^4$; si la forme admet un facteur triple ou plus d'un facteur double, tous les δ s'annulent, et il en est de même de w.

MÉTHODE POUR CALCULER LE SOUS-DISCRIMINANT.

6. J'ai montré ailleurs [1] que si l'on applique à un péninvariant relatif à la forme binaire $(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$ l'opérateur

$$(2) \qquad \zeta_p = a_0 \frac{d}{da_p} + \frac{p+1!}{p!\,1!} a_1 \frac{d}{da_{p+1}} + \ldots + \frac{p+r!}{p!\,r!} a_r \frac{d}{da_{p+r}} + \ldots,$$

[1] *Comptes rendus*, t. CVI, p. 1131; 1888.

le résultat est un péninvariant de la forme. Cet opérateur ne modifie pas le degré, mais diminue de p le poids du péninvariant; il augmente donc de $2p$ l'ordre (par rapport aux variables) du covariant correspondant.

Ceci rappelé, je vais établir le théorème suivant :

Si Δ est le discriminant d'une forme binaire, $\zeta_2(\Delta)$ est (à un facteur numérique près) la source de son sous-discriminant.

Désignons en effet par $A_0, A_1, \ldots, A_n$ les coefficients de la forme binaire écrite sans les coefficients binomiaux, de telle sorte que

$$A_q = \frac{n!}{q!\,\overline{n-q}!}\,a_q;$$

par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ les racines de la forme. L'opérateur ζ_2, rapporté aux coefficients A, devient

$$(3) \qquad \zeta_2 = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{q=n-1}(n-q+1)(n-q)\,A_{q-1}\frac{d}{dA_{q+1}}.$$

D'autre part, on a (*voir* Salmon, *Algèbre supérieure*)

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dA_q} &= 2A_0^{2n-3}\sum_\alpha \alpha^{n-q}(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2\ldots(\delta-\varepsilon)^2 \\ &\quad\times[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)\ldots], \end{aligned}\right.$$

où le signe $\sum$ s'applique, pour les diverses racines telles que α, au produit des carrés de toutes les différences où n'entre pas α, par la somme des produits $n-2$ à $n-2$ des différences où entre α. Si donc nous désignons par P_α l'inverse du produit des carrés de toutes les différences de racines où entre la racine α, et par Q_α la somme des produits $n-2$ à $n-2$ de ces mêmes différences, nous pourrons écrire ainsi la formule (4)

$$(5) \qquad \frac{d\Delta}{dA_q} = \frac{2\Delta}{A_0}\sum \alpha^{n-q}P_\alpha Q_\alpha$$

et l'application de la formule (3) nous donnera

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\zeta_2(\Delta) = {} & \frac{\Delta}{A_0}\sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha \\ & \times [n(n-1)\alpha^{n-2}A_0 + (n-1)(n-2)\alpha^{n-3}A_1 + \ldots \\ & + (n-q)(n-q-1)\alpha^{n-q-2}A_q + \ldots + 2.1\,A_{n-2}].\end{aligned}\right.$$

Mais si $S_{\alpha,q}$ désigne la somme des produits q à q, des racines autres que α, on a généralement

$$A_q = (-1)^q A_0(S_{\alpha,q} + \alpha S_{\alpha,q-1}).$$

Remplaçant A_q par cette valeur dans la formule (6) et ordonnant par rapport aux puissances de α, il vient

$$\begin{aligned}\zeta_2(\Delta) = 2\Delta\sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha[(n-1)\alpha^{n-2} - (n-2)\alpha^{n-3}S_{\alpha,1} \\ + (n-3)\alpha^{n-4}S_{\alpha,2} - \ldots + (-1)^{n-2}S_{\alpha,n-2}].\end{aligned}$$

Mais il est facile de voir que, si l'on développe Q_α suivant les puissances de α, on obtient précisément l'expression écrite ci-dessus entre parenthèses dans le second membre; de sorte qu'on peut écrire simplement

$$(7)\qquad \zeta_2(\Delta) = 2\Delta\sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha^2.$$

Formons maintenant directement le carré de Q_α, défini comme la somme des produits $n-2$ à $n-2$ des $n-1$ différences où figure α. Ce carré se composera évidemment de deux parties :

1° La somme des produits $n-2$ à $n-2$ des carrés de ces $n-1$ différences;

2° La double somme de tous les produits obtenus en multipliant entre eux $n-3$ de ces mêmes carrés, et les multipliant encore par les deux différences non employées.

Par conséquent, $P_\alpha Q_\alpha^2$ se composera de la somme des inverses des carrés des différences de racines où entre α, plus deux fois la somme

des inverses des produits deux à deux de ces mêmes différences; savoir

$$P_\alpha Q_\alpha^2 = \left\{ \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\gamma)^2} + \ldots + \frac{1}{(\alpha-\varepsilon)^2} \right.$$
$$+ 2\left[\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \ldots\right]\right\}.$$

Formons enfin $\sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha^2$. Il est clair que dans cette somme chacune des quantités telles que $\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$ figurera deux fois, comme provenant de $P_\alpha Q_\alpha^2$ et de $P_\beta Q_\beta^2$; quant aux quantités telles que $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, nous pouvons les associer ensemble trois par trois, pour former des groupes tels que

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

chaque élément d'un tel groupe étant fourni par trois termes distincts, savoir : par $P_\alpha Q_\alpha^2$, $P_\beta Q_\beta^2$, $P_\gamma Q_\gamma^2$. Mais il est facile de vérifier que chacun de ces groupes est identiquement nul. Toutes les quantités telles que $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$ disparaissent donc du résultat, et il vient simplement

$$\sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha^2 = 2\left[\frac{1}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\gamma)^2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)^2} + \cdots\right],$$

et, par suite, (7) devient

$$\zeta_2(\Delta) = 4\Delta \sum \frac{1}{(\alpha-\beta)^2},$$

c'est-à-dire, enfin,

(8) $$\zeta_2(\Delta) = 4A_0^{2n-2}\Pi_{m-1},$$

Π_{m-1} étant la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des carrés des différences des racines : ce qui démontre le théorème.

Si Δ est exprimé au moyen des coefficients de la forme écrite avec les coefficients binomiaux, l'opérateur ζ_2 doit être pris sous la forme (2), et il s'introduit un coefficient numérique que l'on trouve facilement être égal à $\frac{1}{4}n^n$. Autrement dit, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences étant supposé $(-n)^n\Delta$, le coefficient de l'avant-dernier terme sera $-\frac{1}{4}(-n^n\Delta'$, où

$$(9) \qquad \Delta' = \zeta_2(\Delta) = \left(a_0\frac{d}{da_2} + 3a_1\frac{d}{da_3} + 6a_2\frac{d}{da_4} + 10a_3\frac{d}{da_5} + \ldots\right)\Delta.$$

Le théorème qui vient d'être démontré fournit immédiatement l'expression de la source du sous-discriminant en fonction des coefficients de la forme, si l'on connaît celle du discriminant; et la source du covariant une fois connue, le covariant tout entier est aisément calculable.

Mais on peut aussi utiliser ce théorème pour obtenir l'expression du sous-discriminant en fonction des covariants distincts qui appartiennent à la forme, pourvu que l'on connaisse une chaîne de syzygies reliant le discriminant aux covariants principaux : il suffit de considérer ces syzygies comme des relations entre les péninvariants sources des covariants, et d'appliquer l'opérateur ζ_2 à ces relations, en écrivant que le résultat est nul : on obtiendra ainsi, de proche en proche, en partant des péninvariants simples pour lesquels le résultat de l'opérateur ζ_2 est facile à calculer directement et à exprimer comme péninvariant le résultat de ce même opérateur sur les péninvariants intermédiaires et finalement sur le discriminant, ce qui fournira l'expression demandée. C'est ce qu'éclairciront les applications que je vais faire maintenant aux formes binaires des troisième, quatrième, cinquième et sixième ordres.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME CUBIQUE.

7. Soit la forme cubique

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Son discriminant est

$$\Delta = a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d.$$

On en déduit

$$(10) \qquad \zeta_2(\Delta) = \left(a\frac{d}{dc} + 3b\frac{d}{dd}\right)\Delta = 12(ac - b^2)^2.$$

Et comme $ac - b^2$ est la source du hessien H, on en conclut que le sous-discriminant de la forme cubique se réduit au carré de son covariant hessien.

Lorsque U possède un facteur carré, il est connu que H se réduit au carré de ce facteur; le sous-discriminant devient donc bien la quatrième puissance de ce facteur. Quand U possède un facteur triple, le hessien et, par suite, le sous-discriminant s'évanouissent identiquement.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME BIQUADRATIQUE.

8. Soit la forme biquadratique

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Les sources des covariants principaux sont :

$h = ac - b^2$, source du hessien H;

$n = a^2d - 3abc + 2b^3$, source du covariant sextique N;

$S = ae - 4bd + 3c^2$, invariant quadratique,

auxquels on peut ajouter l'invariant cubique

$$T = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3.$$

On trouve immédiatement, d'après ces formules,

$$\zeta_2(S) = 12h, \qquad \zeta_2(T) = aS.$$

D'ailleurs le discriminant ayant pour expression

$$\Delta = S^3 - 27T^2;$$

on en conclut

$$\zeta_2(\Delta) = 3S^2\zeta_2(S) - 54T\zeta_2(T) = 18S(2Sh - 3Ta).$$

Mais a est la source de la forme U elle-même ; le sous-discriminant a donc pour expression

$$(11) \qquad W' = S(3UT - 2HS).$$

Ce covariant biquadratique est bien du sixième degré par rapport aux coefficients de la forme. Au moyen des formules connues, on trouve que ses deux invariants quadratique S′ et cubique T′ ont respectivement pour expressions

$$(12) \qquad S' = \tfrac{1}{3}\Delta S^3, \qquad T' = \tfrac{1}{27}\Delta^2 S^3,$$

et, par suite, son discriminant

$$(13) \qquad \Delta' = S^6 T^2 \Delta^3.$$

On trouve aussi pour le hessien H′ de W′

$$(14) \qquad H' = -\tfrac{1}{3}\Delta S^2 H,$$

et, par suite, le sous-discriminant de W′ a pour expression

$$(15) \qquad W'' = S'(3W'T' - 2H'S') = \tfrac{1}{9}\Delta^3 S^7 TU.$$

On est ainsi ramené à la forme primitive elle-même, ce qui donne cette proposition :

Les racines du sous-discriminant d'une forme biquadratique sont composées avec les racines de la forme, comme ces dernières avec celles du sous-discriminant.

C'est ce que l'on voit aussi en formant les invariants absolus $I = \frac{T^2}{S^3}$, $I' = \frac{T'^2}{S'^3}$ de la forme et de son sous-discriminant : ils sont liés par la re-

lation symétrique

$$(16) \qquad I + I' = \tfrac{1}{27}.$$

Lorsque $\Delta = 0$, la formule (14) donne $H' = 0$, et, par suite, en vertu d'une propriété connue des formes biquadratiques, W devient la quatrième puissance d'un facteur linéaire, lequel ne peut être que le facteur double de U, puisque ce dernier divise U et H, et, par conséquent, W.

Lorsque $S = 0$, avec $\Delta \gtrless 0$, W s'annule identiquement. Mais on sait que $S = 0$ indique que les quatre racines de la forme sont en rapport équi-anharmonique. D'où cette proposition, aisée d'ailleurs à démontrer directement :

Si quatre points sur une droite sont en situation équi-anharmonique, la somme des inverses des carrés de leurs distances mutuelles est nulle.

Lorsque $T = 0$ sans que Δ soit nul, W se réduit à $-2HS^2$, et ne diffère de son propre hessien que par un facteur constant; il se réduit donc à un carré parfait, comme il est connu pour le hessien.

Enfin on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme U soit un carré parfait (admette deux facteurs doubles distincts) est qu'elle ne diffère de H que par un facteur constant. Le sous-discriminant doit alors s'annuler identiquement, et, effectivement, on a dans ce cas comme il est connu, $\frac{H}{U} = \frac{3T}{2S}$.

En tenant compte des valeurs connues de S et de $3UT - 2HS$ en fonction de x et des racines α, β, γ, δ de U, ainsi que de la formule (1), on obtient la relation identique suivante entre cinq quantités quelconques x, α, β, γ, δ, ou plutôt entre les différences de ces quantités prises deux à deux (j'écris $\overline{\alpha\beta}$ au lieu de $\alpha - \beta$) :

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\alpha\beta}^2\,\overline{\gamma\delta}^2 + \overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\beta\delta}^2 + \overline{\alpha\delta}^2\,\overline{\beta\gamma}^2\right)\left(\overline{\beta\gamma}^2\,\overline{\gamma\delta}^2\,\overline{\delta\beta}^2\,\overline{x\alpha}^4 + \overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\gamma\delta}^2\,\overline{\delta\alpha}^2\,\overline{x\beta}^4 + \ldots\right)\\ &\quad = 4\left(\overline{\alpha\beta}^2\,\overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\alpha\delta}^2\,\overline{\beta\gamma}^2\,\overline{\beta\delta}^2\,\overline{x\gamma}^2\,\overline{x\delta}^2 + \overline{\alpha\beta}^2\,\overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\alpha\delta}^2\,\overline{\beta\gamma}^2\,\overline{\gamma\delta}^2\,\overline{x\beta}^2\,\overline{x\delta}^2 + \ldots\right).\end{aligned}$$

Si l'on annule séparément le coefficient de chaque puissance de x,

cette identité se décompose en cinq autres qui ont lieu entre quatre quantités quelconques α, β, γ, δ.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME QUINTIQUE.

9. Soit la forme générale U du cinquième ordre

$$U = ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5.$$

Elle possède en tout, comme on sait, 23 invariants ou covariants distincts (y compris la forme elle-même), que je désignerai comme suit, chacun par une lettre majuscule :

	Formes droites.	Formes gauches.
4 invariants..............	J(4), K(8), L(12)	I(18)
4 covariants linéaires......	P(5), P‴(13)	P′(7), P″(11)
3 » quadratiques..	S(2), S′(6)	S″(8)
3 » cubiques.....	T(3)	T′(5), T″(9)
2 biquadratiques.........	Q(4)	Q′(6)
3 quintiques.............	U(1)	U′(3), U″(7)
2 sextiques..............	H(2)	H′(4)
1 du septième ordre......	»	R(5)
1 du neuvième ordre......	»	N(3)

Soit 11 formes droites dont 3 invariants, et 12 formes gauches dont 1 invariant. Dans le Tableau ci-dessus, le nombre entre parenthèses placé à droite de la lettre qui désigne chaque forme indique le degré de cette forme par rapport aux coefficients de U.

Pour préciser le sens de ces désignations, il est indispensable de dire comment les péninvariants, sources de ces divers covariants, peuvent se calculer de proche en proche en partant des coefficients de U. En affectant à chaque péninvariant la même lettre qu'au covariant dont il est la source, mais en caractères minuscules, on aura tout d'abord pour les sources des covariants principaux (associés de U),

$$(17)\qquad \begin{cases} u = a, \\ h = ac - b^2, \\ n = a^2d - 3abc + 2b^3, \\ s = ae - 4bd + 3c^2, \\ u' = a^2f - 5abe + 2acd + 8b^2d - 6bc^2. \end{cases}$$

Les autres péninvariants et invariants droits se déduiront ensuite des précédents par les relations

$$(18)\quad \begin{cases} u^3 t = u^2 hs - u^2 - 4h^3, \\ u^2 q = u^2 s^2 - 6uht - uu' - 4h^2 s, \\ u^2 \mathrm{J} = 12ust + u'^2 + 4hs^2, \\ up \;= \mathrm{J}h + 2qs - s^3 + 9t^2, \\ us' \;= s^2 t - 3qt - hp, \\ u\mathrm{K} = (\mathrm{J}s - 12s')t - p(q + s^2), \\ 3u\mathrm{L} = (p^2 + 4\mathrm{J}s' - \mathrm{K}s)t - 3pss', \\ up''' = (2\mathrm{J}st + s't - ps^2)p - (\mathrm{J}^2 - 3\mathrm{K})t^2, \end{cases}$$

et les péninvariants et invariant gauches par les relations

$$(19)\quad \begin{cases} uh' = hu' - us, \\ ur \;= 2hh' - 3ut, \\ ut' = 3tu' - 2h's, \\ uq' = u'q - 2rs, \\ up' = pu' + 2q's, \\ uu'' = -up - 2hq', \\ us'' = u's' + h'p - hp' + s^2 t', \\ ut'' = -2h's' - 3tu'' - 3stt', \\ up'' = pu'' + 2pst' - q's' - \mathrm{J}tt' - \mathrm{K}h, \\ 6u\mathrm{I} = (6s'^2 - \mathrm{K}q)p' + (6pt - 6ss' - \mathrm{J}q)p''. \end{cases}$$

Les relations (18) et (19) deviennent des syzygies entre les invariants et les covariants eux-mêmes, lorsqu'on y remplace les péninvariants par les covariants dont ils sont respectivement les sources, c'est-à-dire les lettres minuscules par les majuscules correspondantes. Ce sont ces mêmes syzygies que j'ai données dans un travail antérieur (*Comptes rendus*, 1er semestre 1883, p. 426, 479 et 563), comme

constituant, avec les suivantes

$$
(20)\quad
\begin{cases}
u(ps - \mathrm{J}t) - q^2 + 3st^2 + 4hs' = 0,\\
\mathrm{K}h + 3\mathrm{J}t^2 - 4pst - s'(q + s^2) = 0,\\
\mathrm{L}h - \mathrm{K}t^2 - ps't - ss'^2 = 0,\\
12s'^2 - 4p^2s - \mathrm{J}ss' + 3\mathrm{J}pt + \mathrm{K}(s^2 - 3q) = 0,\\
4\mathrm{J}s'^2 - \mathrm{K}ss' - 3\mathrm{L}s^2 + 4p^2s' + 3\mathrm{K}pt + 9\mathrm{L}q = 0,
\end{cases}
$$

qui s'en déduisent par des éliminations faciles, la base de toute étude sur les formations dépendant de la forme du cinquième ordre.

10. On sait que le discriminant de la forme du cinquième ordre a pour expression

$$
(21)\qquad \mathrm{D} = \mathrm{J}^2 - 128\,\mathrm{K}.
$$

Pour obtenir la source du sous-discriminant W, nous avons à appliquer à D l'opérateur

$$
\zeta_2 = a\frac{d}{dc} + 3b\frac{d}{dd} + 6c\frac{d}{de} + 10d\frac{d}{df}.
$$

Or les formules (17) donnent directement

$$
\zeta_2(u) = 0, \qquad \zeta_2(h) = u^2, \qquad \zeta_2(n) = 0, \qquad \zeta_2(s) = 12h,
$$
$$
\zeta_2(u') = 12u.
$$

En appliquant alors l'opérateur ζ_2 aux deux membres de chacune des relations (18), et tenant compte des relations (18) et (20), on trouve successivement

$$
\begin{aligned}
\zeta_2(t) &= us,\\
\zeta_2(q) &= 6ut - 2hs,\\
\zeta_2(\mathrm{J}) &= 40s^2 - 24q,\\
\zeta_2(p) &= u\mathrm{J} + 30st,\\
\zeta_2(s') &= -2up - qs - 9t^2,\\
\zeta_2(\mathrm{K}) &= 10ss' + 30pt - \mathrm{J}q,
\end{aligned}
$$

d'où l'on conclut

$$\zeta_2(\mathrm{D}) = 24\zeta_2(\mathrm{J}) - 128\zeta_2(\mathrm{K}) = 80[\mathrm{J}(q+s^2) - 16(ss'+3pt)].$$

En négligeant le facteur numérique, nous obtenons donc le résultat que voici :

Le sous-discriminant W *de la forme du cinquième ordre a pour expression*

$$(22) \qquad \mathrm{W} = 16(\mathrm{SS}' + 3\mathrm{PT}) - \mathrm{J}(\mathrm{Q}+\mathrm{S}^2),$$

où S *et* S' *sont les deux covariants quadratiques droits* (*du deuxième et du sixième degré*), P *le covariant linéaire le plus simple* (*du cinquième*), T *le covariant cubique droit* (*covariant canonique*), Q *le covariant biquadratique droit, et* J *l'invariant du quatrième degré.*

11. Je vais maintenant étudier le sous-discriminant W considéré comme forme biquadratique fondamentale, mais dont les coefficients dépendent de ceux de la forme quintique U en vertu de la formule (22).

Je me servirai dans ce but des formules et des procédés indiqués dans le travail déjà cité ci-dessus (p. 480 et 563). U étant supposé ramené à la forme type

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} = u[&x^5 + 10hx^3y^2 + 10ux^2y^3 \\ &+ 5(u^2s - 3h^2)xy^4 + (u^2u' - 2hu)y^5], \end{aligned} \right.$$

les formes types des divers covariants sont

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{S} &= sx^2 + u'xy - (hs + 3ut)y^2, \\ \mathrm{S}' &= s'x^2 - (u'' + st')xy + [u(\mathrm{J}t - ps) - hs']y^2, \\ \mathrm{P} &= px - qy, \\ \mathrm{T} &= tx^3 + h'x^2y - (uq + 3ht)xy^2 + (ut - hh')y^3, \\ \mathrm{Q} &= qx^4 + 4rx^3y - 6(ust + hq)x^2y^2 \\ &\quad - 2(u^2t' + uu't + 2hr)xy^3 \\ &\quad - (u^3p + u^2qs - 12u^2t^2 - 2uhst - h^2q)y^4. \end{aligned} \right.$$

et, par suite, la forme type de W sera

$$W = w x^4 + w_1 x^3 y + w_2 x^2 y^2 + w_3 x y^3 + w_4 y^4,$$

avec les valeurs suivantes de w, w_1, w_2.

$$\begin{aligned} w\ &= 16ss' + 48pt - Jq - Js^2, \\ w_1 &= 16[u's' - s(u'' + st')] + 48(h'p - q't) - J(4r + 2u's), \\ w_2 &= 16[s(uJt - ups - hs') - u'(u'' + st') - s'(hs + 3ut)] \\ &\quad - 48[p(uq + 3ht) + h'q'] \\ &\quad - J[-6(ust + hq) + u'^2 - 2s(hs + 3ut)]. \end{aligned}$$

Les valeurs de w_3, w_4 sont inutiles pour l'étude que nous avons en vue.

Formons d'abord le hessien $\mathfrak{H}$ de W. Sa source sera évidemment, à une certaine puissance près de u,

$$(25) \qquad \tfrac{1}{6} w w_2 - \tfrac{1}{16} w_1^2,$$

et comme le covariant, dont cette expression serait la source, serait du quatorzième ordre, tandis que le hessien cherché n'est que du quatrième ordre, il faut que l'expression (25) soit divisible par u^2. D'autre part, $\mathfrak{H}$ étant du quatrième ordre ne peut renfermer dans son expression H qui est du sixième; nous pouvons donc simplifier le calcul en supposant nul le péninvariant h qui doit disparaître de lui-même du résultat; ce qui revient à supposer que l'on ait opéré préalablement une transformation linéaire en prenant pour nouvel y un des facteurs de H. Sous le bénéfice de cette hypothèse, nous pouvons prendre

$$\begin{aligned} w &= 16ss' + 48pt - Jq - Js^2, \\ \tfrac{1}{2} w_1 &= (8s' - Js)u' - 8su'' - 8s^2t' + 24ph' - 24tq' - 2Jr, \\ w_2 &= u(28Jst - 48s't - 16ps^2 - 48pq) \\ &\quad - Ju'^2 - 48h'q' - 16u'u'' - 16su't'. \end{aligned}$$

Mais on trouve facilement, de proche en proche, au moyen des for-

mules (18), (19) et (20) dans lesquelles on a supposé $h = 0$,

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{c}
u'^2 = u^2 J - 12ust, \qquad n^2 = -u^3 t, \qquad nu' = u^2(s^2 - q), \\
nh' = u^2 st, \qquad u'h' = us(q - s^2), \qquad h'^2 = -us^2 t, \\
nr = 3u^2 t^2, \qquad u'r = 3ut(q - s^2), \\
h'r = -3ust^2, \qquad r^2 = -9ut^3, \\
nt' = u^2 s', \qquad u't' = u(3Jt - 2ps) + 2s(qs - 9t^2), \\
h't' = -uss', \\
rt' = -3us't, \qquad t'^2 = 2s^2 s' + 6qs' + 12pst - 9Jt^2, \\
nq' = u^2(Jt - 2ps) + us^2(3q - s^2), \qquad u'q' = u(Jq + 6ss'), \\
h'q' = u^2 K + u(2pq + 15s't), \qquad q'r = 3u(2Jt^2 - 2pst - qs'), \\
q't' = -u(Ks + Js') + ps(s^2 - 3q), \\
q'^2 = u[Jps + 3ps^2 - (J^2 - 3K)t], \\
nu'' = u^2 pt, \qquad u'u'' = up(q - s^2), \qquad h'u'' = -upst, \\
u''r = -3upt^2, \qquad u''t' = -ups', \\
u''q' = up(2ps - Jt) + ps^2(s^2 - 3q), \\
u''^2 = -up^2 t.
\end{array}\right.$$

Grâce à ces formules et aux syzygies (18) et (20), on peut obtenir w_2 et w_1^2 en fonction des seuls péninvariants droits, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
w_2 &= u^2(16K - J^2) + 24u[4p(s^2 - q) - 3Jst] + 32s^2(9t^2 - qs) \\
\tfrac{1}{4} w_1^2 &= u^2[J^3 s^2 - 16J^2 ss' + 64Js'^2 - 1152Kpt] \\
&\quad + 4u[9(48K - J^2)t^3 + 64ps^3 s' - 96Ks^3 t - 576p^2 qt + 128p^2 s^2 t \\
&\qquad - 48Jpst^2 - 16.243ps't^2 - 768ss'^2 t - 8Jpqs^2 + 64pqss' \\
&\qquad + 15J^2 qst - 72Js^2 s't - 192Jqs't + 6J^2 s^3 t] \\
&\quad + 32s^3[4s^3 s' + 48ps^2 t + Jqs^2 + 72s't^2 \\
&\qquad - 27Jst^2 + 4qss' - 72pqt],
\end{aligned}$$

et dès lors il vient pour la source du covariant $12U^2\mathfrak{g}$,

$$2ww_2 - \frac{3}{4}w_1^2 = 32As^2 + 12A'u + A''u^2,$$

où A, A', A'' ont les valeurs suivantes

$$A = 72ss't^2 - 44qs^2s' + 864pt^3 + 120pqst - 18Jqt^3 + 2Jq^2s + 63Js^2t^2 - Jqs^3 - 12s^4s' - 144ps^3t,$$

$$A' = 192ps^3s' - 320pqss' - 120Js^2s't + 640p^2s^2t - 192p^2qt - 528Jpst^2 + 8Jpqs^2 + 16Jpq^2 - 3J^2qst - 16Jps^4 + 6(J^2 + 16K)s^3t + 768ss'^2t + 9(J^2 - 48K)t^3 + 16.243ps't^2 + 192Jqs't,$$

$$A'' = -192Js'^2 + 16(J^2 + 32K)ss' - J(J^2 + 32K)s^2 + 2J(J^2 - 16K)q - 96(J^2 - 52K)pt.$$

Pour mettre en évidence dans A le facteur u qui doit nécessairement s'y trouver, il suffit d'ajouter la quantité suivante, qui est identiquement nulle, en vertu des syzygies (18) et (20), où l'on a fait $h = 0$.

$$\left(96pt + Jq - \frac{32}{3}ss'\right)(up - 2qs + s^3 - 9t^2) + \left(9Jt + \frac{86}{3}ps\right)(us' - s^2t + 3qt) - 14st(uK - Jst + 12s't + pq + ps^2) - \frac{68}{3}s^2(3Jt^2 - 4pst - qs' - s^2s').$$

Tous les termes non divisibles par u disparaissent, et il vient

$$A = u(96p^2t + Jpq + 9Js't - 14Kst + 18pss')$$

De même $\frac{32As^2}{u} + 12A'$ doit être divisible par u. Cette quantité a pour expression

$$\frac{32As^2}{u} + 12A' = 4[720ps^3s' - 960pqss' - 288Js^2s't + 2688p^2s^2t - 576p^2qt - 1584Jpst^2 + 32Jpqs^2 + 48Jpq^2 - 9J^2qst - 48Jps^4 + (18J^2 + 176K)s^3t + 2304ss'^2t + 27(J^2 - 48K)t^3 + 16.729ps't^2 + 576Jqs't].$$

Ajoutons à la parenthèse la quantité identiquement nulle pour $h=0$, en vertu des syzygies (18) et (20),

$$\begin{aligned}
&(\alpha J^2 t + \beta K t + \gamma p s' + \delta J p s)(up - 2qs + s^3 - 9t^2) \\
&\quad + (\varepsilon p^2 + \zeta J s' + \eta K s + \theta J^2 s)(us' - s^2 t + 3qt) \\
&\quad + (\lambda s s' + \mu p t + \nu J q + \xi J s^2)(uK - Jst + 12 s' t + pq + ps^2) \\
&\quad + (\pi s^2 + \rho q)(3uL - p^2 t - 4 J s' t + K s t + 3 p s s') \\
&\quad + \sigma J p (ups - uJt - q^2 + 3 s t^2) \\
&\quad + (\tau J t + \varphi p s)(3 J t^2 - 4 p s t - q s' - s^2 s') \\
&\quad + \psi t (K t^2 + p s' t + s s'^2),
\end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \psi$ désignent dix-huit coefficients numériques arbitraires. Déterminons ces dix-huit coefficients par la condition que tous les termes indépendants de u disparaissent à la fois : nous aurons à satisfaire à dix-huit équations du premier degré qu'il est inutile d'écrire. On trouve qu'elles sont satisfaites en laissant η et ν indéterminés [1], et en donnant aux autres arbitraires les valeurs suivantes

$$\begin{gathered}
\alpha = 19, \qquad \beta = -528, \qquad \gamma = -1968 - 4\eta, \qquad \delta = \tfrac{1}{3}(80 + \nu), \\
\varepsilon = 560, \qquad \zeta = -1584 - 4\eta - 4\nu, \qquad \theta = \tfrac{1}{3}(47 + \nu) \qquad \lambda = 96, \\
\mu = -2160 - 3\eta, \qquad \xi = \tfrac{1}{3}(64 - \nu), \\
\pi = 352 + \eta, \qquad \rho = -1056 - 3\eta, \\
\sigma = 48 + \nu, \qquad \tau = 48, \qquad \varphi = -96 - \eta, \qquad \psi = -3456.
\end{gathered}$$

Dès lors il vient

$$\begin{aligned}
\frac{32 A s^2}{u^2} + \frac{12 A'}{u} = 4\big[&(352 + \eta)(3Ls^2 - 9Lq - 4p^2 s') + \tfrac{1}{3}(56 + \nu) J p s \\
&- (29 + \nu) J^2 p t - 3(896 + \eta) K p t \\
&- 16(396 + \eta + \nu) J s'^2 + (96 + \eta) K s s' \\
&+ \tfrac{1}{3}(47 + \nu) J^2 s s' + \nu J K q + \tfrac{1}{3}(64 - \nu) J K s^2\big].
\end{aligned}$$

[1] Cette indétermination correspond à la possibilité de modifier la forme du résultat du calcul par l'emploi des deux dernières syzygies du groupe (20).

En ajoutant A'' à l'expression écrite dans le second membre, nous obtiendrons $12\mathfrak{H}$; en donnant aux arbitraires η et ν les valeurs respectives -352 et -56, il viendra

$$\begin{aligned} 12\mathfrak{H} = {} & 12J^2pt - 1536Kpt - 512Kss' + 4J^2ss' - 256JKq \\ & + 128JKs^2 - J^3s^2 + 2J^3q. \end{aligned}$$

Ce qu'on peut écrire, en vertu de (21) et de (22),

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} & = \tfrac{1}{12}D(4ss' + 12pt - Js^2 + 2Jq), \\ & = \tfrac{1}{48}D[w + 3J(3q - s^2)]. \end{aligned}$$

Ainsi le hessien du sous-discriminant W a pour expression, en fonction des covariants de U,

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{48}D[W + 3J(3Q - S^2)]. \tag{27}$$

Cette formule très simple montre immédiatement :

1° *Que si la forme quintique* U *a un facteur double, le hessien de son sous-discriminant s'évanouit identiquement, ce qui revient à dire que le sous-discriminant est un bicarré parfait, comme nous le savions d'avance;*

2° *Que si l'invariant biquadratique* J *est nul, le sous-discriminant se confond avec son propre hessien, et est, par suite, un carré parfait; il se réduit d'ailleurs dans ce cas au covariant*

$$SS' + 3PT.$$

12. Proposons-nous maintenant de calculer, en fonction de J, K, L, les deux invariants Σ et Θ du sous-discriminant, considéré comme forme biquadratique indépendante.

On sait que, si Σ et Θ sont les deux invariants d'une forme biquadratique V, dont le hessien est V', les invariants correspondants de $\alpha'V + 6\beta V'$, où α et β sont deux arbitraires, ont respectivement pour expressions

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma' & = \Sigma\alpha^2 + 18\Theta\alpha\beta + 3\Sigma^2\beta^2, \\ \Theta' & = \Theta\alpha^3 + \Sigma^2\alpha^2\beta + 9\Sigma\Theta\alpha\beta^2 + (54\Theta^2 - \Sigma^3)\beta^3. \end{aligned} \right. \tag{28}$$

Prenons pour V et V' le sous-discriminant W et son hessien $\mathfrak{G}$, et posons $\alpha = -\frac{1}{3J}$, $\beta = \frac{8}{3JD}$, il viendra, à cause de (27),

$$\alpha V + 6\beta V' = 3Q - S^2,$$

et nous sommes amené à calculer les deux invariants Σ' et Θ' de la forme $3Q - S^2$: une fois ces invariants connus, les équations (28), qui deviennent

$$(29)\quad \begin{cases} 9J\, D^2\Sigma' = D^2\Sigma - 144 D\Theta + 192\Sigma^2, \\ 27J^3 D^3\Theta' = -D^3\Theta + 8D^2\Sigma^2 - 576 D\Sigma\Theta + 512(54\Theta^2 - \Sigma^3), \end{cases}$$

nous serviront à déterminer Σ et Θ.

D'après les formes-types données plus haut pour L et Q (24), on a pour la forme-type de $3Q - S^2$,

$$3Q - S^2 = c_0 x^4 + c_1 x^3 y + c_2 x^2 y^2 + c_3 x y^3 + c_4 y^4;$$
$$c_0 = 3q - s^2,$$
$$c_1 = 12r - 2u's,$$
$$c_2 = -12ust + 2hs^2 - 18hq - u'^2,$$
$$c_3 = -6u^2 t' + 2hu's - 12hr,$$
$$c_4 = -3u^3 p + 3u^2(9t^2 - qs) + h^2(3q - s^2).$$

Puisqu'il s'agit de calculer des invariants, rien n'empêche de supposer $h = 0$, comme dans le calcul du numéro précédent, et de poser simplement, en vertu des relations (26),

$$(30)\quad \begin{cases} c_0 = 3q - s^2, & c_1 = 2(6r - u's), & c_2 = -u^2 J, \\ c_3 = -6u^2 t, & c_4 = 3u^2(-up + 9t^2 - qs). \end{cases}$$

L'invariant Σ' est par définition

$$(31)\qquad u^4\Sigma' = c_0 c_4 - \tfrac{1}{4} c_1 c_3 + \tfrac{1}{12} c_2^2.$$

Remplaçant $c_0, c_1, \ldots$ par leurs valeurs (30), puis rt, $u't'$ au moyen

de (26), il vient

$$u^2\Sigma' = \tfrac{1}{12}u^2 J^2 - 9u(pq - ps^2 + 6s't + Jst) \\ + 3(27qt^2 + 9s^2t^2 - 3q^2s - qs^3).$$

Ajoutons au second membre la quantité identiquement nulle, en vertu des syzygies (18) et (20) où l'on a fait $h = 0$,

$$3q(up - 2qs + s^3 - 9t^2) - 18t(us' - s^2t + 3qt) \\ - 15s(ups - uJt - q^2 + 3st^2).$$

nous pourrons diviser les deux membres par u, et il viendra

$$u\Sigma' = \tfrac{1}{12}uJ^2 + 6(Jst - 12s't - pq - ps^2).$$

Mais la parenthèse du second membre est précisément égale à uK, en vertu de la sixième des syzygies (18). Il vient donc enfin

$$(32) \qquad \Sigma' = 6K + \tfrac{1}{12}J^2.$$

Un calcul tout semblable, dont il est inutile d'indiquer les détails, fournit

$$(33) \qquad \Theta' = \tfrac{1}{216}J^3 - \tfrac{7}{4}JK.$$

D'autre part, les équations (29) montrent immédiatement que Σ et Θ doivent être respectivement divisibles par D et D^2 : comme d'ailleurs ils sont respectivement des degrés 16 et 24 par rapport aux coefficients de U (puisque W est de degré 8), on peut poser

$$(34) \qquad \Sigma = D(\alpha D + \beta K), \qquad \Theta = D^2(\gamma D + \delta K),$$

α, β, γ, δ étant quatre coefficients numériques qu'il nous reste à déterminer. Pour cela, il suffit de remplacer dans les deux équations (29) Σ' et Θ' par leurs valeurs (32) et (33), Σ et Θ par leurs expressions (34), J^2 par $D + 128K$, et, puisqu'alors ces deux équations doivent se réduire à des identités, d'annuler séparément les coefficients des

diverses puissances de $\frac{D}{K}$. On obtient ainsi sept équations de condition, savoir

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
&768\alpha^2 + 4\alpha - 576\gamma - 3 = 0,\\
&384\alpha\beta + \beta - 144\delta - 246 = 0,\\
&\beta^2 - 100 = 0,\\
&2^{12}\alpha^3 - 2^{13}.3^3\gamma^2 - 2^6\alpha^2 - 2^9.3^2\alpha\gamma + 2^3\gamma + 1 = 0,\\
&2^{11}.3\alpha^2\beta - 2^{13}.3^3\gamma\delta - 2^6\alpha\beta + 2^8.3^2\alpha\delta\\
&\qquad\qquad + 2^8.3^2\beta\gamma + 2^2\delta + 3 = 0,\\
&2^6.3\alpha\beta^2 - 2^7.3^3\delta^2 - \beta^2 + 2^3.3^2\beta\delta - 2^3.3.31 = 0,\\
&\beta^3 - 1000 = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

auxquelles doivent satisfaire les coefficients numériques α, β, γ, δ. Une discussion facile montre que les seules valeurs convenables sont les suivantes

$$\alpha = \tfrac{1}{12}, \qquad \beta = 10, \qquad \gamma = \tfrac{1}{216}, \qquad \delta = \tfrac{7}{12},$$

en sorte que les expressions cherchées sont

$$\Sigma = D(\tfrac{1}{12}D + 10K), \qquad \Theta = D^2(\tfrac{1}{216}D + \tfrac{7}{12}K),$$

ou encore

$$(36)\qquad \Sigma = \tfrac{1}{12}D(J^2 - 8K), \qquad \Theta = \tfrac{1}{216}D^2(J^2 - 2K).$$

On en conclut pour le discriminant de W,

$$(37)\qquad \Delta = \Sigma^3 - 27\Theta^2 = \tfrac{1}{16}J^2KD^3(J^2 - 3K),$$

et pour le sous-discriminant de W, toutes réductions faites,

$$(38)\quad W' = \tfrac{1}{288}JD^3(J^2 - 8K)[4J(SS + 3PT) - 2KS^2 - (J^2 - 6K)Q].$$

La formule (37) est particulièrement simple et remarquable; elle

fait connaître quatre cas différents où W admet un facteur double, savoir :

1° Quand la forme primitive U admet elle-même un facteur double ($D = 0$);

2° Quand elle est divisible par le covariant linéaire P, sans que T le soit ($J^2 - 3K = 0$);

3° Quand le covariant quadratique S est carré parfait ($J = 0$);

4° Quand l'invariant K est nul.

Remarquons en passant que, lorsque toutes les racines de U sont réelles, toutes celles de W sont nécessairement imaginaires; il faut donc que Δ soit positif. Comme $D = J^2 - 128K$ est d'ailleurs positif, et, par suite, aussi $J^2 - 3K$, la formule (37) montre que K doit être aussi positif, comme l'a trouvé M. Hermite.

15. Je vais maintenant calculer les résultants du sous-discriminant W et des deux covariants P (linéaire) et T (canonique) de la forme fondamentale. Je suivrai pour cela la méthode que j'ai indiquée dans les *Comptes rendus* (*voir* au n° 9 ci-dessus), en écrivant les six relations

$$
(39)\quad \begin{cases}
w = 16ss' + 48pt - J(q + s^2) = 0, \\
up - Jh - 2qs + s^3 - 9t^2 = 0, \\
us' - s^2 t + 3qt + hp = 0, \\
uK - Jst + 12s't + pq + ps^2 = 0, \\
3uL - p^2 t - 4Js't + Kst + 3pss' = 0, \\
ups - uJt - q^2 + 3st^2 + 4hs' = 0,
\end{cases}
$$

ajoutant une septième relation qui s'obtient en égalant à zéro la source du covariant dont on veut obtenir le résultant avec W, éliminant entre ces sept relations six des péninvariants u, h, p, s, s', t, q; le septième disparaît de lui-même en vertu de l'homogénéité, et il reste une relation entre les invariants J, K, L qui donne le résultant cherché égalé à zéro.

Appliquons cette méthode au résultant de W et de P, qui doit être de degré 28 par rapport aux coefficients de U. Il suffit d'ajouter aux

équations (39) celle-ci

$$p = 0.$$

La quatrième et la cinquième du groupe (39) donnent alors

$$u = \frac{(J^2 - 3K)st}{JK + 9L}, \qquad s' = \frac{(K^2 + 3JL)s}{4(JK + 9L)};$$

d'où, au moyen de la première,

$$q = \frac{4K^2 - J^2K + 3JL}{J(JK + 9L)} s^2.$$

Ces valeurs de u, s', q étant portées dans la troisième, s^2t disparaît de lui-même, et il reste, tous calculs faits, pour le résultant demandé

$$(J^2 - 3K)(5JK^2 - J^2L + 48KL).$$

Cette expression montre que, lorsque $J^2 - 3K = 0$, le facteur linéaire fourni par le covariant P divise W en même temps que U : $J^2 - 3K$ doit donc entrer en facteur dans le résultant de U et de W. D'autre part, si $D = 0$, l'expression ci-dessus se réduit à

$$625K^2(JK - 16KL)$$

et s'annule, par conséquent, si U admet deux facteurs carrés; ce qui devait être, puisqu'alors W doit s'annuler identiquement.

Passons au calcul du résultant de W et de T, qui doit être de degré 36.

Il suffit d'ajouter au groupe (39) l'équation

$$t = 0.$$

La première et la quatrième équation du groupe (39) combinées donnent

$$uJK + 16pss' = 0.$$

Comparant avec la cinquième, savoir

$$uL + pss' = 0.$$

Il vient simplement

$$u(\mathrm{JK} - 16\mathrm{L}) = 0.$$

Le résultant demandé est donc

$$(\mathrm{JK} - 16\mathrm{L})^3.$$

14. Le résultant de la forme U et de son sous-discriminant W peut s'obtenir par un calcul analogue, bien qu'un peu plus compliqué. Ajoutons au groupe (39) l'équation

$$u = 0,$$

et comme l'invariant L disparaîtrait des données, remplaçons la dernière relation du groupe (39) par une autre qui contienne L, par exemple par la troisième syzygie du groupe (20),

$$\mathrm{L}h - \mathrm{K}t^2 - ps't - ss'^2 = 0. \tag{40}$$

Les cinq premières relations du groupe (39) deviennent d'ailleurs, pour $u = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{J}h + 2qs - s^3 + 9t^2 = 0,\\ &s^2t - 3qt - hp = 0,\\ &\mathrm{J}st - 12s't - p(q + s^2) = 0,\\ &p^2t + 4\mathrm{J}s't - \mathrm{K}st - 3pss' = 0,\\ &16ss' + 48pt - \mathrm{J}(q + s^2) = 0. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

L'élimination de $q + s^2$ entre la troisième et la cinquième relation du groupe (41) donne tout d'abord

$$t = \frac{16pss'}{\mathrm{J}^2s - 12\mathrm{J}s' - 48p^2}.$$

De la quatrième on tire directement

$$t = \frac{3pss'}{p^2 + 4\mathrm{J}s - \mathrm{K}s}.$$

D'où par comparaison, en posant, pour abréger les calculs,

$$s = p^2 z, \qquad J^2 - 3K = N, \qquad J^2 - 128K = D:$$

$$\frac{s'}{p^2} = \frac{(16N - D)z - 2^5.5^2}{2^2.5^3 J}$$

et, par suite,

$$\frac{t}{p^3} = \frac{z[(16N - D)z - 2^5.5^2]}{2^2.5J(Nz - 45)}.$$

La dernière équation du groupe (41) donne alors

$$\frac{q}{p^4} = -z^2 + \frac{4z(Nz + 30)[(16N - D)z - 2^5.5^2]}{5^3 J^2 (Nz - 45)}.$$

D'autre part, si l'on élimine h entre les deux premières relations du groupe (41) et la relation (40), on obtient les deux relations

$$ps^3 - 9pt^2 + q(3Jt - 2ps) - Js^2 t = 0,$$
$$L(s^2 - 3q)t - Kpt^2 - p^2 s' t - pss'^2 = 0.$$

Remplaçant dans ces deux relations s, s', t et q par leurs expressions données ci-dessus, on obtient

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2^4 DN^2 z^3 + 5(2^8 N^2 - 2^6.3DN + 3^2 D^2) z^2 \\ & \qquad - 2^4.3.5^2(2^6 N - 3.5D)z + 2^{10}.3^2.5^3 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} & N^2[2^8.5^3 L - J(2^4 N - D)] z^3 \\ & \quad + [2^4.3.5^4(3D - 2^6 N)L \\ & \qquad + 5J(2^5.11 N^2 + 2^2 ND - D^2)] z^2 \\ & \quad + 2^2.5^2[2^8.3^2.5^3 L - J(2^4.3.13N + 31D)] z \\ & \qquad\qquad + 2^7.3^2.5^4 J = 0. \end{aligned} \right.$$

Le résultant de ces deux équations en z sera, comme il est facile de le voir, de degré 84 par rapport aux coefficients de U, et il sera formé du résultant cherché de U et W (de degré 44) multiplié par un facteur parasite de degré 40.

Pour obtenir ce résultant, on pourrait employer la formule connue

qui donne le résultant de deux formes cubiques en fonction de leurs coefficients. Mais on peut éviter ce calcul pénible et fastidieux en remarquant que l'équation (42) admet la racine $-\frac{2^4.5}{D}$, et se décompose par suite en deux, savoir

$$(44) \qquad Dz + 2^4.5 = 0,$$

$$(45) \qquad 2^4 N^2 z^2 + 15(3D - 2^6 N)z + 2^6.3^2.5^2 = 0,$$

en sorte qu'il suffit de calculer successivement le résultant de (44) et de (43), celui de (45) et (43), et de former leur produit.

Le résultant de (44) et (43) s'obtient immédiatement; son expression est, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} R_1 = {} & (2^4 N + 3^2 D) \\ & \times [2^6.5^4(2^4 N + 3D)L - J(2^6 N^2 + 2^4 3DN + 13D^2)]. \end{aligned}$$

Pour obtenir le résultant de (45) et de (43), remarquons que le premier membre de (45), multiplié par $2^4.5^3 z$, donne précisément le coefficient de L dans le premier membre de (43). On peut donc remplacer (43) par

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} J[& N^2(D - 2^4 N)z^3 + 5(2^5.11 N^2 + 2^2 ND - D^2)z^2 \\ & - 2^2.5^2(2^4.3.13N + 31D)z + 2^7.3^2.5^4] = 0 \end{aligned} \right.$$

et cette équation, à son tour, par la suivante, obtenue en la combinant avec (42),

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} J[& N^2(D - 2^4 N)z^2 + 5(2^6.3N^2 + 2^2.ND - D^2)z \\ & - 2.5^2(2^5.3^2 N + 107D)] = 0. \end{aligned} \right.$$

On est ainsi ramené à calculer le résultant des deux équations quadratiques (45) et (47), et la formule connue fournit aisément, toutes réductions faites,

$$R_2 = J^4 N^2 D^2 (2^4 N + 3^2 D).$$

D'où enfin, pour le résultant des deux équations en z,

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &R_1 R_2 = N^2 D^2 J^4 (2^4 N + 3^2 D)^2 \\ &\quad \times [2^6 . 5^3 (2^4 N + 3D) L - J(2^6 N^2 + 2^4 . 3DN + 13 D^2)], \end{aligned}\right.$$

expression qui est bien du degré 84.

Pour savoir quels sont les facteurs parasites, examinons ce que deviennent les relations (40) et (41) lorsqu'on annule successivement les divers facteurs de (48) :

1° Supposons $J = 0$; il vient successivement

$$s = \frac{10 p^2}{K}; \qquad s' = \pm p^2 \sqrt{\frac{10}{3K}}, \qquad t = \mp \frac{10 p^3}{3K} \sqrt{\frac{10}{3K}}, \qquad h = 0$$

et la relation (40) n'est pas satisfaite. Le facteur J^4 doit donc être rejeté.

2° Supposons $2^4 N + 3^2 D = 0$, c'est-à-dire $J^2 - 48K = 0$. Ce facteur, existant à la fois dans R_1 et dans R_2, correspond aussi bien à la racine $z_1 = -\frac{2^4 . 5}{D}$ de (44), qu'aux deux racines de (45), qui dans cette hypothèse deviennent l'une $-\frac{2^6 . 5}{3^2 D}$, et l'autre $-\frac{2^4 . 5}{D}$, égale à z_1. Si donc on fait d'abord $s = -\frac{2^4 . 5}{D} p^2$, on trouve que les relations (40) et (41) ne sont satisfaites que par l'une des deux hypothèses $K = 0$, $J^3 - 2^9 . 3^2 L = 0$, qui l'une et l'autre annulent le second facteur de R_1. De même si l'on fait $s = -\frac{2^6 . 5 p^2}{3^2 D}$, on trouve que la relation (40) n'est pas satisfaite. Il faut donc rejeter aussi le facteur $2^4 N + 3^2 D$.

Ces deux facteurs étant supprimés, l'expression de $R_1 R_2$ se réduit au degré 52, et ne contient plus qu'un facteur parasite de degré 8; ce ne peut donc être que N ou D; et on arrive finalement à ce résultat, que le résultant de U et de W est le produit des trois facteurs invariants

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &J^2 - 3K, \quad J^2 - 128K, \\ &64(19J^2 - 432K)L - J(J^4 - 80JK + 1856K^2), \end{aligned}\right.$$

dont l'un des deux premiers est élevé au carré.

Nous savions déjà (n° **13**) que $J^2 - 3K$ devait être un facteur du résultant de U et W, et que lorsque $J^2 - 3K = 0$, le facteur linéaire commun à U et W n'est autre que le covariant linéaire P. Il est facile d'exprimer en fonction de ce covariant P, du second covariant linéaire droit P‴ et des invariants, le facteur commun à U et W, dans les deux autres cas où il en existe un, en employant par exemple la syzygie suivante, qui se déduit aisément de celles que j'ai données (*loc. cit.*):

$$(50) \qquad 3pp''' = Kp^2 + (JK + 9L)s' - \tfrac{4}{3}(K^2 + 3JL)s.$$

Supposons par exemple que le troisième des invariants (49) s'annule, ce qui correspond à $z = \frac{s}{p^2} = -\frac{2^4 . 5}{D}$.

Les relations données ci-dessus fournissent

$$s' = \frac{4(48K - J^2)p^2}{JD}$$

et la syzygie (50) devient

$$(51) \qquad JDp''' + [JK(J^2 - 28K) - 8L(J^2 + 72K)]p = 0.$$

Le covariant linéaire composé qui forme le premier membre de (51) est donc le facteur linéaire commun à U et W dans cette hypothèse.

Supposons maintenant $D = 0$; en suivant la même marche, nous devons prendre pour $z \left(\text{ou } \frac{s}{p^2}\right)$ l'une des racines de (45); les deux racines de cette équation deviennent dans ce cas égales à $\frac{30}{N}$. On en conclut $s' = \frac{96K - 7J^2}{10JN} p^2$, et la syzygie (50) devient

$$(52) \qquad 10Jp''' + (96L - JK)p = 0.$$

Le premier membre de (52) *donne par conséquent l'expression, en fonction des deux covariants linéaires droits et des invariants, du facteur double de la forme fondamentale* U, *lorsque son discriminant* D *est nul.*

15. Cet important résultat est facile à vérifier. J'ai donné en effet pour le cas général (sous la seule condition que l'invariant gauche I ne

soit pas nul) la syzygie

$$(53)\quad \begin{cases} I^4 u = (9L^4 + 2KL^2M - M^3)p^5 \\ \qquad + 5(KM^2 - 6L^2M - K^2L^2)p^4 p''' \\ \qquad + 10(6KL^2 - 3M^2 - JLM)p^3 p'''^2 \\ \qquad + 10(JKL + 2KM - 9L^2)p^2 p'''^3 \\ \qquad - 25(M + JL)pp'''^4 - (J^2 - 3K)p'''^5, \end{cases}$$

où l'on a mis pour abréger M pour $\frac{1}{4}(K^2 - JL)$. Or il est aisé de vérifier que cette syzygie peut s'écrire

$$(54)\quad \begin{cases} 2^{14} I^4 u = \{[10Jp''' + (96L - JK)p]^2 \\ \qquad \times [(16L^2 + 3JKL - 2K^3)p^3 \\ \qquad + 10JLp^2p''' - 40Kpp'''^2 - 160p'''^3] \\ \qquad + (J^2 - 128K)[(2K^5 - 208K^2L^2 - 3JK^3L + 256JL^3)p^5 \\ \qquad\qquad + 10(160L^2 + 5JKL - 4K^3)Kp^4p''' \\ \qquad\qquad + 20(12K^3 - 5JKL - 528L^2)p^3p'''^2 \\ \qquad\qquad - 40(16K^2 + 25JL)p^2p'''^3 \\ \qquad\qquad\qquad + 800Kpp'''^4 - 384p'''^5]\}, \end{cases}$$

et, sous cette forme, elle met en évidence le mode de décomposition de U *quand le discriminant est nul, l'expression du facteur double telle que nous l'avons trouvée directement, et celle du facteur cubique qui le complète.*

Le discriminant de ce facteur cubique a d'ailleurs pour expression

$$2^9K^6 - 2^5.3.11JK^4L + 11.37J^2K^2L^2 - 100J^3L^3 \\ - 2^7.59K^3L^2 + 2^{10}.3^3L^4 + 2^6.3^2.13JKL^3,$$

et, si l'on suppose $J^2 - 128K = 0$, il devient

$$J^{12} - 3.11.2^{10}J^9L + 3.29.2^{21}J^6L^2 - 83.2^{32}J^3L^3 + 3^3.2^{43}L^4,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(J^3 - 2^{11}L)^3(J^3 - 2^{10}.3^3L).$$

Cette expression semble indiquer que la forme U admet deux facteurs doubles, lorsque, outre le discriminant, l'un des invariants $J^3 - 2^{11}L$, $J^3 - 2^{10}.3^3 L$ s'annule. Mais cette conclusion serait erronée pour le dernier, car I^2 s'annule aussi dans ce cas, et la syzygie (54) cesse d'exister, ou plutôt de donner la représentation de U en fonction des covariants linéaires droits, qui se confondent l'un avec l'autre. De même, si l'on exprime que, pour $J^2 = 128K$, le reste de la division du facteur cubique par le facteur linéaire double est nul, ce qui doit donner la condition pour que U admette un facteur triple, on trouve $I^2 = 0$, ce qui rend la syzygie illusoire; et, en effet, on sait que, si U possède un facteur triple, tous ses invariants doivent s'annuler.

16. Pour terminer ce qui concerne le sous-discriminant de la forme du cinquième ordre, je vais donner l'expression de ce sous-discriminant en fonction des deux covariants linéaires droits, P, P''', et des invariants.

La formule (22) et les sixième et septième syzygies du groupe (18) donnent tout d'abord l'identité

$$pw = p[16ss' + 48pt - J(q+s^2)] + J(uK - Jst + 12s't + pq + ps^2)$$
$$- \tfrac{16}{3}(3uL - p^2t - 4Js't + Kst + 3pss'),$$

qui conduit à la syzygie suivante

$$(55)\quad pw = u(JK - 16L) + \tfrac{1}{3}[160p^2 + 100Js' - (3J^2 + 16K)s]t.$$

Cette syzygie montre en passant que, *lorsque* $JK - 16L$ *est nul, sans que* I (*résultant de* P *et de* T) *le soit,* W *admet non seulement un des facteurs de* T, *comme nous l'avions trouvé* (n° **15**), *mais les trois facteurs de* T; et en outre que, dans la même hypothèse, P divise $100JS' - 3(J^2 + 16K)S$. Cette dernière circonstance est d'ailleurs une conséquence immédiate des deux syzygies suivantes, que j'ai données dans le travail déjà cité plusieurs fois [1],

$$(56)\quad \begin{cases} I^2 s = -L(M + JL)p^2 + (3KL + JM)pp''' - (JK + 9L)p'''^2, \\ I^2 s' = (3KL^2 - M^2)p^2 + (KM - 9L^2)pp''' - (M + JL)p'''^2. \end{cases}$$

---

[1] Une erreur d'impression y avait fait mettre dans la première de ces syzygies $(3KL - JM)pp'''$ au lieu de $(3KL + JM)pp'''$.

Au moyen des trois syzygies (55) et (56) et de celle-ci que j'ai également donnée dans le même travail,

$$(57) \qquad I^2 t = -L^2 p^3 + M p^2 p''' - K p p'''^2 + p'''^3,$$

il est facile d'exprimer en fonction de p, p''' et des invariants le second membre de (55), qui devient divisible par p; d'où, toutes réductions faites, la syzygie

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} I^4 w = {} & [(16L - JK)M^3 - 12JL^2M^2 + (J^2 - 144K)L^3M \\ & \qquad + (117K - J^2)JL^4 + 1296L^5]p^4 \\ & + 2[20JM^3 + (3J^2 + 16K)LM^2 \\ & \qquad + (J^3 - 93JK - 288L)L^2M \\ & \qquad\qquad + (198L - JK)JL^3]p^3p''' \\ & - [(J^3 + 22JK + 32L)M^2 \\ & \qquad + 2(7JK - 208L)JLM \\ & \qquad + 2J^3KL^2 - (187J^2 + 432K)L^3]p^2p'''^2 \\ & + 2(J^2 - 3K)[(JK + 16L)M + 7JL^2]pp'''^3 \\ & - (J^2 - 3K)(5JM + 12KL + J^2L)p'''^4, \end{aligned} \right.$$

qui fournit l'expression cherchée. Le coefficient de p'''^4 reproduit, comme cela devait être, le résultant de W et de P, tel que nous l'avions obtenu au n° **15** par une autre méthode. Celui de p^4 donne évidemment le résultant de W et de P'''.

Si l'on suppose $J^2 - 3K = 0$, W devient divisible par P^2 : P est donc bien le facteur double de W dans ce cas.

Si l'on suppose $J = 0$, l'expression de W se réduit à

$$[\tfrac{1}{2}(K^3 - 72L^2)p^2 + 2K^2pp''' - 6Kp'''^2]^2,$$

ce qui confirme le résultat trouvé au n° **11**, savoir que le sous-discriminant devient carré parfait quand $J = 0$.

Si l'on suppose $K = 0$, l'expression de W se réduit à

$$\tfrac{1}{4}L(Jp''' + 6Lp)^2[J^2p'''^2 + 12JLpp''' + L(144L - \tfrac{1}{4}J^3)p^2],$$

ce qui met en évidence le facteur double correspondant à cette hypothèse.

Enfin, il est aisé de vérifier que la syzygie (58) peut s'écrire encore

$$(59)\quad \begin{cases} 2^{20} I^4 w = (16L - JK)[10 J p''' + (96L - JK)p]^4 \\ \qquad + (J^2 - 128K)(A p'''^4 + B p p'''^3 + C p^2 p'''^2 + D p^3 p''' + E p^4), \end{cases}$$

avec ces valeurs des coefficients invariants

$$A = 2^8.3L(133J^2 - 384K) + 2^4.5JK(125J^2 - 384K),$$

$$B = 2^{12}.3^2JL^2 - 2^9KL(149J^2 - 384K) - 2^5JK^2(125J^2 - 384K),$$

$$\begin{aligned} C = &- 2^{17}.3^3L^3 - 2^{15}JL^2(2J^2 + 27K) \\ &+ 2^7K^2L(49J^2 + 128K) + 2^3JK^3(75J^2 + 1408K), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = &- 2^{17}.3L^3(2J^2 - 3K) + 2^{12}.101JK^2L^2 \\ &+ 2^7K^3L(95J^2 - 128K) - 2^3.5JK^4(J^2 + 128K), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = &- 2^{18}.3^2JL^4 + 2^{14}KL^3(J^2 + 18K) + 2^{12}.3JK^3L^2 \\ &- 2^4KL(25J^2 + 128K) + JK^5(J^2 + 128K). \end{aligned}$$

La syzygie (59) montre de nouveau que W devient, lorsque le discriminant de U est nul, la quatrième puissance du facteur double de U.

Si l'on suppose que l'invariant $16L - JK$ soit nul, tous les coefficients A, B, ... deviennent divisibles par $J^2 - 3K$, en même temps que I^2 qui se réduit à

$$\frac{JK^2(J^2 - 3K)(J^2 - 128K)}{2^{12}};$$

et la syzygie (59) devient

$$\begin{aligned} I^2 K w = 2^6 p'''^4 - 2^5 K p p'''^3 - K(J^2 + 16K)p^2 p'''^2 \\ - \frac{K^2}{4}(3J^2 - 32K)p^3 p''' - \frac{J^2K^3}{8} p^4. \end{aligned}$$

En même temps la syzygie (57) devient

$$I^2 t = p'''^3 - K p p'''^2 - \frac{K(J^2 - 16K)}{64} p^2 p''' - \frac{J^2K^2}{256} p^3.$$

D'où l'on déduit immédiatement

$$K\varpi = 32t(2p''' + Kp),$$

relation qui concorde avec les résultats trouvés au n° **16**, et fournit une expression simple du quotient de W par le covariant canonique T, lorsque $16L - JK = 0$.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME SEXTIQUE.

17. Soit la forme générale U du sixième ordre,

$$U = ax^6 + 6bx^5y + 15cx^4y^2 + 20dx^3y^3 + 15ex^2y^4 + 6fxy^5 + gy^6.$$

J'ai donné dans les *Comptes rendus* (t. XCVI, 1883, p. 1717, 1776 et 1842) les résultats de l'application à la forme du sixième ordre des mêmes méthodes que j'avais employées pour celle du cinquième et qui ont été utilisées dans les paragraphes précédents. Je vais rappeler sommairement ici ces résultats.

La forme sextique possède en tout 26 invariants et covariants distincts (y compris la forme elle-même) dont voici le Tableau :

	Formes droites.	Formes gauches.
5 invariants	A(2), B(4), C(6), D(10)	E(15)
6 covariants quadratiques	S(3), S′(5), S″(7)	S‴(8), S^{IV}(10), S^{V}(12)
5 covariants biquadratiques	Q(2), Q′(4)	Q″(5), Q‴(7), Q^{IV}(9)
5 covariants sextiques	U(1), U′(3)	U″(4), U‴(6), U^{IV}(6)
3 covariants du huitième ordre	H(2)	H′(3), H″(5)
1 covariant du dixième ordre	»	P(4)
1 covariant du douzième ordre	»	N(3)

Soit 12 formes droites dont 4 invariants, et 14 formes gauches dont 1 invariant (le nombre entre parenthèses à droite de chaque lettre indique le degré de la forme correspondante par rapport aux coefficients de U).

Les sources des 6 covariants principaux (associés de U) sont don-

nées par les formules suivantes :

$$(60) \quad \begin{cases} u = a, \\ h = ac - b^2, \\ n = a^2 d - 3abc + 2b^3, \\ q = ae - 4bd + 3c^2, \\ h' = a^2 f - 5abe + 2acd + 8b^2 d - 6bc^2, \\ A = ag - 6bf + 15ce - 10d^2. \end{cases}$$

Les autres péninvariants et invariants droits se déduisent des précédents par les relations

$$(61) \quad \begin{cases} u^3 u' = u^2 hq - n^2 - 4h^3, \\ u^2 q' = 12uu'q + h'^2 + 4hq^2, \\ u^3 s = u^2(Ah + 2q^2) - 18uhu' - 3nh' - 12h^2 q, \\ 3u^2 B = u(3Au' - 2qs) + q^3 - 27u'^2 + h(2Aq - 3q'), \\ 3us' = -uAs + (A^2 - 36B)h + 36u's + q(3q' - 4Aq), \\ 3uC = -4uAB + (A^2 - 36B)u' - qs' + s(3Aq - 4q'), \\ us'' = u'(3s' - As) + q'(2Aq - q') + (4B - A^2)q^2, \\ uD = 3(Bq - s^2)s' + (q' - Aq)s'' + (As^2 + 4Bq')s \\ \qquad - (4C + 9AB)qs + (A^2 B + 3AC + 108B^2)u', \end{cases}$$

et les autres péninvariants et invariants gauches par les relations

$$(62) \quad \begin{cases} up = hh' - nq, \\ uh'' = 3h'u' - 2pq, \\ u^2 u'' = u(An - h'q) + 12hp - 18nu', \\ uq'' = u''q - h's, \\ uu^{\text{IV}} = 2ps - 3u'u'', \\ uu''' = 4ps + 2h''q + (q' - Aq)h' - 6u'u'', \\ uq''' = (Au'' + 2u''')q - h's', \end{cases}$$

$$
(62)\quad \left\{
\begin{aligned}
uq^{\text{IV}} &= \tfrac{1}{2}A(h's' - u''q') - h''s' - u'''q',\\
us''' &= (Au'' + 2u''')s - u''s',\\
us^{\text{IV}} &= (4Bs - s'')u'' + \tfrac{2}{3}(Au^{\text{IV}} + 5q's)s,\\
us^{\text{V}} &= (4Bs' - As'')u'' - 2u'''s''\\
&\quad + \tfrac{2}{3}(Au^{\text{IV}} + 5q''s)s',\\
u\text{E} &= (As^2 - 2ss' - 2Bq' - Cq)s'''\\
&\quad + 2(2Bq - s^2)s^{\text{IV}} + (q' - Aq)s^{\text{V}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les relations (61) et (62) deviennent des syzygies, quand on y remplace les péninvariants par les covariants correspondants. Il existe d'ailleurs entre les formes droites d'autres syzygies qui se déduisent des précédentes par des éliminations faciles, et dont voici les plus importantes :

$$
(63)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(12Aq - 9q')u - 4q^2s + (As - 3s')h - u(s^2 + 12Bq) = 0,\\
&3u'(s' - As) + q(3s^2 + 4Bq) - (3C + 4AB)h + 4uBs = 0,\\
&q(s'' - As') + q'(s' - As) + (A^2 - 8B)qs\\
&\qquad + 3(3C + 4AB)u' - u(AC + A^2B + 12B^2) = 0,\\
&\quad hs'' + u's^2 + (Aq - q')(2qs - Au') - u(Cq + Bq') = 0,\\
&u'(3s'' - As' + 12Bs) + (C + 4AB)q^2 + qs(s' - As)\\
&\qquad + q'(s^2 - 4Bq) + u[Bs' + (C + AB)s] = 0,\\
&s'^2 - 4ss'' - 4Bs^2 - 4(AC + A^2B + 12B^2)q\\
&\qquad + (3C + 4AB)q' = 0,\\
&As'^2 - 4s's'' - 16Bss' - 4(AB + C)s^2\\
&\qquad + 4(D - 3BC - 4AB^2)q - (AC + 48B^2)q' = 0,\\
&s''^2 - Bs'^2 + (AC + A^2B + 8B^2)s^2 - 2(C + AB)ss'\\
&\quad + (48B^3 - 3C^2 - 9ABC - 8A^2B^2 - AD)q\\
&\qquad + (D + 4AB^2 + 3BC)q' = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Enfin le discriminant de la forme U s'exprime en fonction des quatre invariants fondamentaux A, B, C, D, par la formule

$$
(64)\quad \Delta = A^5 - 375A^3B - 25000AB^2 - 625A^2C - 46875BC + 3125D.
$$

18. Pour obtenir le sous-discriminant de U, il suffit d'appliquer l'opérateur ζ_2, qui est ici

$$\zeta_2 = a\frac{\partial}{\partial c} + 3b\frac{\partial}{\partial d} + 6c\frac{\partial}{\partial e} + 10d\frac{\partial}{\partial f} + 15e\frac{\partial}{\partial g}$$

aux péninvariants principaux définis par les formules (60), puis aux relations successives (61), enfin à la relation (64), en utilisant au besoin les relations (61) et (63). On trouve ainsi successivement

$$\zeta_2(u) = 0,$$
$$\zeta_2(h) = u^2,$$
$$\zeta_2(u) = 0,$$
$$\zeta_2(q) = 12h,$$
$$\zeta_2(k) = 12u,$$
$$\zeta_2(A) = 30q.$$
$$\zeta_2(u') = uq,$$
$$\zeta_2(q') = 8(Ah + 4q^2 - us),$$
$$\zeta_2(s) = uA + 18u,$$
$$\zeta_2(B) = Aq - q',$$
$$\zeta_2(s') = 30Au' - 22qs - 36uB,$$
$$\zeta_2(C) = 12(s^2 - 2Bq),$$
$$\zeta_2(s'') = 3u(5C + 4AB) + 2(A^2 + 36B)u' + (36q' - 40Aq)s,$$
$$\begin{aligned}\zeta_2(D) = {} & (22A^2B + 27AC + 600B^2)q \\ & + 3(A^2 + 20B)s^2 - 6Ass' - (15C + 28AB)q' - 15s'^2,\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\zeta_2(\Delta) = 75\{ & 5(A^3 + 400AB + 375C)q' - [3A^3 + 2500(C + AB)]Aq \\ & + 25(A^2 - 300B)s^2 - 250Ass' - 2500ss''\}.\end{aligned}$$

En supprimant le facteur numérique 75, et tenant compte de la sixième syzygie (63), on peut donner au sous-discriminant W de la

forme sextique diverses expressions équivalentes en fonction des invariants et covariants de U; par exemple celle-ci :

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} W = {} & 25(A^2 - 200B)S^2 - 250ASS' - 625S'^2 \\ & - 3(A^4 - 10000B^2)Q + 5A(A^2 - 100B)Q', \end{aligned} \right.$$

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} W = {} & (A^2 - 100B)[50S^2 - 3(A^2 + 100B)Q + 5AQ'] \\ & - 25(AS + 5S')^2. \end{aligned} \right.$$

On voit que le sous-discriminant ne dépend explicitement que des deux premiers invariants A, B, des deux premiers covariants quadratiques S, S′, et des deux premiers covariants biquadratiques Q et Q′. L'expression (66) montre, en outre, que lorsque l'invariant composé $A^2 - 100B$ est nul, le sous-discriminant devient un carré parfait. On sait d'ailleurs que cet invariant s'annule en même temps que le discriminant Δ, lorsque U admet un facteur triple; dans cette hypothèse, W doit s'annuler identiquement : il faut donc que $AS + 5S'$ s'annule aussi identiquement. C'est ce que l'on vérifie aisément en supposant que l'on ait pris pour y le facteur triple : e, f, g sont nuls; les formules (60), (61) et (62) permettent de calculer les divers péninvariants en fonction de a, b, c, d; comme on a, d'ailleurs, d'une manière générale, en ramenant U à sa forme-type,

$$\begin{aligned} S &= sx^2 + u''xy + [u(Aq - q') - hs]y^2, \\ S' &= s'x^2 + (Au'' + 2u''')xy + [2u(2Bq - s^2) - hs']y^2, \end{aligned}$$

il est aisé de s'assurer que

$$As + 5s', \qquad 3Au''' + 5u'', \qquad (A^2 + 20B)q - Aq' - 10s^2,$$

sont nuls, et que, par suite, $AS + 5S'$ s'évanouit bien identiquement.

Je ne pousserai pas plus loin ici l'étude du sous-discriminant de la forme sextique, étude qui, pour être complète, exigerait des développements étendus, et dont je me propose de faire le sujet d'un travail ultérieur.

Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

PREMIER MÉMOIRE.

DES INVOLUTIONS SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. Soit, sur une courbe algébrique quelconque, une série de groupes de n points, tels que chaque groupe soit déterminé d'une manière unique et sans exception si l'on en donne k points; on dira que ces groupes forment une *involution*, *d'ordre* n et *d'espèce* k.

D'après cela, les n points d'un groupe G de l'involution jouent un rôle symétrique dans la détermination du groupe, c'est-à-dire que si l'on en prend k au hasard, ces k déterminent *sans ambiguïté* les $n-k$ autres, et cette définition exclut les séries de groupes, d'espèce au moins égale à deux, dont chacun est constitué par l'ensemble de r groupes d'une même involution ($r > 1$).

L'exemple le plus simple d'involution est donné par les groupes de points mobiles que découpent, sur une courbe algébrique fixe, des courbes appartenant à un même système linéaire; or il est très digne de remarque que, sur une courbe algébrique générale, il n'existe pas d'autres involutions que celles ainsi déterminées [1], et, de plus, si

[1] Il y a une exception évidente si $n = k$, c'est-à-dire si tous les points de chaque groupe de l'involution sont arbitraires (*voir* le n° 2).

une courbe admet une involution échappant à cette définition, l'involution est nécessairement d'espèce un et jouit de propriétés tout à fait spéciales.

L'examen de ces questions va nous occuper tout d'abord.

2. Considérons sur une courbe algébrique C, de genre p, ayant pour équation $f(x, y) = 0$, une involution I, d'ordre n et d'espèce k; désignons par G un quelconque des groupes de l'involution.

Il est clair que le seul cas intéressant est celui où n surpasse k, car si n était égal à k, chaque groupe serait formé par n points quelconques de la courbe et aucune fonction ne serait liée à l'involution : nous supposerons donc l'inégalité $n > k$.

Cela posé, soit une différentielle abélienne de première espèce appartenant à C, $g(x, y)\,dx$, que nous écrirons pour simplifier $g(x)\,dx$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les n points d'un groupe G quelconque, formons la somme

$$g(x_1)\,dx_1 + g(x_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n)\,dx_n;$$

cette somme peut s'exprimer en fonction des coordonnées et des différentielles de k des points du groupe G, des points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ par exemple, puisque k points déterminent le groupe. On a donc

$$\begin{aligned} g(x_1)\,dx_1 + g(x_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n)\,dx_n \\ = \Lambda_1\,dx_1 + \Lambda_2\,dx_2 + \ldots + \Lambda_k\,dx_k, \end{aligned}$$

$\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ étant des fonctions de $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_k, y_k$; de plus, ce sont des fonctions rationnelles, puisque le premier membre de l'équation précédente, et, par suite, le second, n'a qu'une valeur quand on se donne les k points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et les accroissements dx_1, $dx_2, \ldots, dx_k$, en vertu de la définition même de l'involution.

Or la fonction

$$\int g(x_1)\,dx_1 + \ldots + \int g(x_n)\,dx_n$$

ne devient jamais infinie sur la courbe C, puisque $\int g(x)\,dx$ est une intégrale de première espèce; il en est donc de même de l'inté-

grale de différentielle totale

$$\int A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \ldots + A_k\,dx_k,$$

et, par conséquent, l'intégrale $\int A_h\,dx_h$, où l'on donne à toutes les quantités x, sauf x_h, des valeurs constantes, reste aussi finie sur toute la courbe. Donc $A_h\,dx_h$ est une somme de différentielles abéliennes de première espèce par rapport à la variable x_h, et l'on a

$$A_h\,dx_h = H_1 g_1(x_h)\,dx_h + \ldots + H_p g_p(x_h)\,dx_h,$$

où $g_1(x)\,dx_1, \ldots, g_p(x)\,dx$ sont p différentielles abéliennes de première espèce, linéairement distinctes, appartenant à la courbe C considérée, de genre p; $H_1, \ldots, H_p$ sont indépendants de x_h et sont dès lors fonctions de $x_1, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_k$. Ces fonctions H sont d'ailleurs, d'après ce qui a été dit sur les A, des fonctions rationnelles des coordonnées des points dont elles dépendent, et comme l'intégrale $\int A_h\,dx_h$ doit rester finie quelles que soient les valeurs de ces coordonnées, il est évidemment nécessaire que $H_1, H_2, \ldots, H_p$ ne puissent devenir infinis, c'est-à-dire se réduisent à des constantes.

Donc enfin l'expression

$$g(x_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n)\,dx_n$$

est égale à la somme de k différentielles abéliennes de première espèce portant respectivement sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$, et comme les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jouent un rôle symétrique dans la définition du groupe (c'est-à-dire peuvent être permutés entre eux sans que les points $x_{k+1}, \ldots, x_n$ changent), les k différentielles abéliennes dont il s'agit se réduisent nécessairement à une même différentielle, où l'on remplace successivement la variable par $x_1, x_2, \ldots, x_k$. On obtient ainsi la relation fondamentale

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &g(x_1)\,dx_1 + g(x_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n)\,dx_n \\ &\quad = \gamma(x_1)\,dx_1 + \ldots + \gamma(x_k)\,dx_k, \end{aligned}\right.$$

$\gamma(x)\,dx$ désignant une différentielle de première espèce, qui peut d'ailleurs se réduire identiquement à zéro.

Si elle ne se réduit pas à zéro, c'est-à-dire si le second membre de (1) ne s'annule pas, on déduit de cette relation une conséquence importante. Le groupe G, en effet, est défini de la même manière en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k$ qu'en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}$: on a donc, en permutant x_k et x_{k+1} dans (1),

$$g(x_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n)\,dx_n = \gamma(x_1)\,dx_1 + \ldots + \gamma(x_{k+1})\,dx_{k+1},$$

d'où l'on déduit, en comparant à (1) $\gamma(x_k)\,dx_k = \gamma(x_{k+1})\,dx_{k+1}$, et, en général,

$$\gamma(x_1)\,dx_1 = \gamma(x_2)\,dx_2 = \ldots = \gamma(x_n)\,dx_n. \tag{2}$$

Cette relation, si l'on se donne un groupe initial, G_0, détermine x_2, $x_3, \ldots, x_n$ en fonction de x_1; il n'y aura donc pas k points arbitraires dans un groupe, ce qui montre que, pour une involution d'espèce supérieure à l'unité, les fonctions $\gamma(x)$ sont nulles, quelle que soit la différentielle de première espèce, $g(x)\,dx$, dont on est parti.

3. Donc, pour une involution I d'espèce supérieure à l'unité, on aura les p relations

$$(3)\quad \begin{cases} g_1(x_1)\,dx_1 + g_1(x_2)\,dx_2 + \ldots + g_1(x_n)\,dx_n = 0, \\ g_2(x_1)\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + g_2(x_n)\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_p(x_1)\,dx_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + g_p(x_n)\,dx_n = 0; \end{cases}$$

$g_1(x)\,dx, \ldots, g_p(x)\,dx$ désignent toujours p différentielles abéliennes de première espèce appartenant à la courbe C. Bien entendu, pour certaines involutions d'espèce un, de semblables équations pourront avoir lieu.

Les involutions I pour chaque groupe desquelles les équations (3) sont vérifiées sont, comme nous allons l'établir, des involutions *rationnelles*, c'est-à-dire que leurs groupes sont ceux que découpent, sur la courbe C, des courbes appartenant à un même système linéaire.

En effet, les relations (3), lorsqu'on suppose que les points x_1, x_2, ..., x_n ne satisfont pas à d'autres conditions, expriment, en vertu d'un théorème fondamental bien connu, que le groupe variable formé par ces n points est découpé sur la courbe proposée par des courbes adjointes à celle-ci et ne la rencontrant, en outre, qu'en des points fixes. Ces courbes adjointes constituent, comme on sait, un système linéaire, ayant une équation de la forme

$$(4) \qquad \lambda_1 \varphi_1(x, y) + \ldots + \lambda_\rho \varphi_\rho(x, y) = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ sont des polynomes en x, y, de même degré et $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ des constantes arbitraires. Quant à ρ, c'est un entier supérieur à k, puisqu'une des courbes (4) doit pouvoir passer par k points arbitraires de C.

Observons de plus que les polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ sont linéairement distincts, et même, si leur degré atteint ou surpasse le degré de C, qu'il n'existe aucune relation identique de la forme

$$(5) \qquad \mu_1 \varphi_1(x, y) + \ldots + \mu_\rho \varphi_\rho(x, y) = P(x, y) f(x, y),$$

$P(x, y)$ étant un polynome entier et $f(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation de C.

D'après cela, tous les groupes de l'involution considérée I sont découpés sur la courbe C par *des* courbes appartenant au système linéaire (4); mais la réciproque n'est pas vraie, puisque, en général, il y a, entre les points $x_1, \ldots, x_n$ d'un groupe, d'autres relations que les équations (3). Pour qu'une courbe du système (4) détermine sur C un groupe de l'involution, il faut que les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$, correspondant à cette courbe, vérifient des relations algébriques, en nombre égal à $\rho - k - 1$; de plus, comme par k points arbitraires de C doit passer une et une seule des courbes ainsi isolées dans le système linéaire (4), il faut nécessairement que les $\rho - k - 1$ relations qui lient les λ soient du premier ordre : ce dernier point demande toutefois quelques explications, que nous allons présenter, pour rendre le raisonnement rigoureux.

4. On peut établir simplement, et nous démontrons ce lemme

connu en note (¹), que tout système de courbes algébriques indécomposables, tel que par k points quelconques du plan ne passe qu'une courbe du système, est un système linéaire.

(¹) Lemme. — *Tout système algébrique de courbes planes indécomposables, tel que par k points quelconques du plan passe une seule courbe du système, est un système linéaire.*

Montrons que le théorème est vrai pour une valeur de k s'il est vrai pour la valeur $k-1$. Considérons à cet effet le système primitif, Σ, et, dans ce système, les courbes qui passent par un point A, quelconque d'ailleurs, du plan.

Le système (α) formé par ces courbes est $k-1$ fois infini; il est donc linéaire par hypothèse, et son équation est de la forme

$$(\alpha) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0,$$

les λ étant des constantes. Soit $f_0(x, y) = 0$ une autre courbe du système Σ ne passant pas par A; désignons par B un point quelconque de cette courbe. Les courbes du système Σ passant par B forment un système (β), $k-1$ fois infini, linéaire par conséquent; or parmi les courbes de ce nouveau système figurent la courbe $f_0 = 0$ et les courbes de la série (α) qui passent par B. Donc le système (β) a pour équation générale

$$(\beta) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = 0,$$

les λ étant des constantes liées seulement par la relation

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \ldots + \lambda_k f_k(x_0, y_0) = 0,$$

où x_0, y_0 sont les coordonnées de B. Or x_0, y_0 satisfont seulement à la relation $f_0(x_0, y_0) = 0$; on peut donc toujours trouver un point B tel qu'on ait simultanément

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \ldots + \lambda_k f_k(x_0, y_0) = 0,$$
$$f_0(x_0, y_0) = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ étant des constantes *données*, quelconques d'ailleurs. En d'autres termes, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ étant des constantes quelconques, on peut toujours trouver un système (β), contenu dans Σ, comprenant la courbe

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k = 0;$$

cette courbe appartient donc à Σ, quelles que soient les valeurs des k paramètres dont elle dépend, et par suite le système k fois infini, Σ, est linéaire.

Le théorème est d'ailleurs vrai pour $k=1$. En ce cas, en effet, deux courbes quelconques du système ne peuvent se couper qu'en des points fixes; soient

Or considérons la série formée, dans le système linéaire (4), par les courbes de ce système qui découpent sur C les groupes de l'involution I; soit S cette série. La courbe générale de la série S est indécomposable, sinon les groupes de I, qui sont découpés sur C par les courbes de la série, seraient formés de points jouant un rôle dissymétrique, ou bien chaque groupe de I se composerait de groupes d'une involution d'ordre inférieur, cas que nous écartons.

Par k points choisis au hasard sur C ne passe qu'une courbe de la série S : si en effet il en passait deux, comme ces courbes passeraient aussi par les $n-k$ points de C qui, avec les k points primitifs, forment un groupe de l'involution, et que d'ailleurs toutes les courbes de la série coupent C aux mêmes points fixes, on pourrait, en désignant par $S_1 = 0$ et $S_2 = 0$ les équations des deux courbes, trouver une constance θ telle que la courbe $S_1 + \theta S_2 = 0$ passât par un nouveau point de C, ce qui nécessite que le polynome $S_1 + \theta S_2$ soit identiquement divisible par $f(x, y)$. Il y aurait ainsi, pour certaines valeurs non nulles des constantes μ, une relation de la forme (5), ce qui est inexact.

Cela posé, distinguons deux cas : ou bien par k points *quelconques du plan* ne passe qu'une courbe de la série S, et celle-ci est linéaire, d'après le lemme; ou bien par ces k points passent r courbes de la série ($r > 1$). Ce dernier cas se subdivise lui-même : ou bien par $k-1$ points quelconques du plan et un point quelconque de C passent moins de r courbes distinctes de la série, ce qui exige que deux au moins des r courbes qui doivent passer par les k points ainsi choisis coïncident; ou bien, par ces k points passent r courbes distinctes de

---

$f_1 = 0$, $f_2 = 0$ deux d'entre elles, d'ordre N : elles ont N^2 points communs, par lesquels passe nécessairement toute courbe $\psi = 0$ du système. Il en résulte qu'on peut déterminer la constante θ de façon que la courbe

$$f_1 + \theta f_2 = 0$$

passe par un nouveau point choisi sur ψ, qu'elle coupe ainsi en $N^2 + 1$ points. Donc, si ψ est indécomposable, on a identiquement

$$\psi = f_1 + \theta f_2,$$

ce qui démontre la proposition.

la série S. Dans la première hypothèse on voit que C est l'*enveloppe* (ou une partie de l'enveloppe) des courbes de la série qui passent par $k-1$ points, quelconques d'ailleurs, du plan, c'est-à-dire que toutes les courbes de la série touchent C en un ou plusieurs points *mobiles* : ce résultat est absurde, puisque ces courbes découpent sur C les groupes de l'involution (chaque courbe ne coupant C qu'en n points mobiles qui forment un groupe) et que d'ailleurs les points d'un groupe général sont évidemment distincts deux à deux. Dans la deuxième hypothèse on distinguera de même deux cas, selon que par $k-2$ points du plan et deux points de C il passe r ou du moins de r courbes de S et, en continuant les mêmes raisonnements, on arrivera à une absurdité ou à l'hypothèse finale, également inadmissible, que par k points de C passent plusieurs courbes distinctes de la série S.

5. La conclusion de cette analyse est que la série S est une série linéaire; en d'autres termes, sur une courbe algébrique C, les involutions d'espèce supérieure à l'unité sont : 1° des involutions dont l'espèce est égale à l'ordre ; 2° des involutions rationnelles, c'est-à-dire dont les groupes sont découpés sur la courbe par les courbes d'un même système linéaire.

Il existe, bien entendu, des involutions rationnelles d'espèce un.

6. Étudions maintenant les involutions spéciales pour lesquelles une au moins des différentielles désignées, au n° **2**, par $\gamma(x)\,dx$ n'est pas nulle. On a trouvé les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & g(x_1)\,dx_1+g(x_2)\,dx_2+\ldots+g(x_n)\,dx_n \\ & \quad =\gamma(x_1)\,dx_1+\gamma(x_2)\,dx_2+\ldots+\gamma(x_k)\,dx_k, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \gamma(x_1)\,dx_1=\gamma(x_2)\,dx_2=\ldots=\gamma(x_n)\,dx_n;$$

$g(x)\,dx$ est une différentielle quelconque de première espèce; $\gamma(x)\,dx$ est également une différentielle de cette espèce, qui est déterminée lorsque la première est donnée.

Les équations (2) montrent, comme on l'a dit au n° **2**, que $x_2, \ldots, x_n$ sont des fonctions de x_1, c'est-à-dire que l'involution est d'espèce un;

on a donc $k=1$, et les relations précédentes deviennent

$$g(x_1)\,dx_1+\ldots+g(x_n)\,dx_n=\gamma(x_1)\,dx_1, \tag{6}$$

$$\gamma(x_1)\,dx_1=\gamma(x_2)\,dx_2=\ldots=\gamma(x_n)\,dx_n. \tag{7}$$

Si la différentielle $\gamma(x)\,dx$ est égale, à un facteur constant près, à la différentielle $g(x)\,dx$, ce facteur sera nécessairement, d'après (6) et (7), égal à n; en ce cas l'équation (6) sera une conséquence des équations (7), que l'on conservera seules. Si $\gamma(x)\,dx$ et $g(x)\,dx$ sont linéairement distincts, on posera

$$G(x)\,dx=g(x)\,dx-\frac{1}{n}\gamma(x)\,dx;$$

$G(x)\,dx$ sera une différentielle abélienne de première espèce, et les relations (6) et (7) s'écriront

$$G(x_1)\,dx_1+G(x_2)\,dx_2+\ldots+G(x_n)\,dx_n=0,$$
$$\gamma(x_1)\,dx_1=\gamma(x_2)\,dx_2=\ldots=\gamma(x_n)\,dx_n.$$

En considérant successivement, à la place de $g(x)$, p différentielles de première espèce linéairement distinctes, on obtient ainsi deux séries de différentielles de cette espèce,

$$G_1(x)\,dx,\quad G_2(x)\,dx,\quad \ldots,\quad G_q(x)\,dx$$

et

$$\gamma_1(x_1),\quad \ldots,\quad \gamma_\varpi(x)\,dx,$$

linéairement distinctes entre elles et de nombre total p, vérifiant les relations

$$(8)\quad \begin{cases} G_1(x_1)\,dx_1+G_1(x_2)\,dx_2+\ldots+G_1(x_n)\,dx_n=0,\\ G_2(x_1)\,dx_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+G_2(x_n)\,dx_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ G_q(x_1)\,dx_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+G_q(x_n)\,dx_n=0, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \gamma_1(x_1)\,dx_1=\gamma_1(x_2)\,dx_2=\ldots=\gamma_1(x_n)\,dx_n,\\ \gamma_2(x_1)\,dx_1=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\gamma_2(x_n)\,dx_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_\varpi(x_1)\,dx_1=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\gamma_\varpi(x_n)\,dx_n. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$q + \varpi = p.$$

7. Ces relations importantes font connaître la propriété caractéristique des courbes C, qui admettent des involutions non rationnelles.

Considérons en effet deux fonctions symétriques quelconques des coordonnées des n points d'un groupe de l'involution, par exemple, pour fixer les idées, les fonctions $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ et $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$. Le groupe étant déterminé quand on se donne un de ses points, x_h, y_h, les deux fonctions précédentes s'exprimeront rationnellement en x_h, y_h; soient $\mathcal{F}_1(x_h, y_h)$ et $\mathcal{F}_2(x_h, y_h)$ ces expressions : il est clair que les fonctions $\mathcal{F}_1(x, y)$ et $\mathcal{F}_2(x, y)$ ne changent pas si l'on donne successivement à x et y les valeurs des coordonnées des points d'un même groupe. Cela posé, à un point x, y de C faisons correspondre un point X, Y par la transformation

$$(10) \qquad X = \mathcal{F}_1(x, y), \qquad Y = \mathcal{F}_2(x, y),$$

le point X, Y décrira une courbe $\mathcal{C}$; et, d'après ce qui précède, à un point de C correspondra un seul point de $\mathcal{C}$, à un point de $\mathcal{C}$ correspondront n points de C, formant un groupe de l'involution ([1]).

Le genre de la courbe $\mathcal{C}$ se détermine aisément. Soit en effet $\mathcal{G}(X)\,dX$ une différentielle abélienne de première espèce le long de cette courbe; on aura, en vertu des équations (10),

$$\mathcal{G}(X)\,dX = g(x)\,dx,$$

$g(x)\,dx$ étant une différentielle abélienne, le long de C, différentielle qui sera évidemment de première espèce. D'ailleurs X et Y ne chan-

---

([1]) Il peut toutefois arriver qu'à un point de $\mathcal{C}$ correspondant, sur C, les points de deux (ou plusieurs) groupes de l'involution : il faut pour cela que les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ aient les mêmes valeurs pour les points de deux (ou plusieurs) groupes, dont l'un est arbitraire, c'est-à-dire dans le cas considéré, il faut que les groupes G puissent être associés deux à deux de telle sorte que les deux groupes d'un même couple aient même centre des moyennes distances. Il est bien évident qu'on peut toujours éviter ces cas singuliers par un choix convenable des deux fonctions symétriques primitives.

gent pas si l'on remplace, dans leurs expressions (10), x et y par les coordonnées des points d'un même groupe de l'involution; il en est donc de même de $\mathcal{G}(X)\,dX$ et, par suite, il vient

$$g(x_1)\,dx_1 = g(x_2)\,dx_2 = \ldots = g(x_n)\,dx_n,$$

ce qui montre que la différentielle $g(x)\,dx$ est une combinaison linéaire et homogène des différentielles $\gamma_1(x)\,dx, \ldots, \gamma_\varpi(x)\,dx$.

Inversement une différentielle $\gamma_h(x)\,dx$, où l'on remplace x et y par leurs valeurs en fonction de X et Y, déduites de (10), prend la forme $\mathcal{G}(X, Y)\,dX$, où $\mathcal{G}(X, Y)$ est rationnel en X et Y; en effet, la fonction $\gamma_h(x)\,\dfrac{dx}{dX}$ a, d'après (9), la même valeur pour tous les points d'un groupe de l'involution et n'a dès lors qu'une valeur en chaque point X, Y de la courbe $\mathcal{C}$.

Il résulte de cette analyse que la courbe $\mathcal{C}$ a autant de différentielles distinctes de première espèce qu'il y a de différentielles $\gamma(x)\,dx$ sur la courbe C, c'est-à-dire ϖ; la courbe $\mathcal{C}$ est donc de genre ϖ.

Ainsi, la courbe C est liée à une autre courbe algébrique $\mathcal{C}$, de telle sorte qu'à un point de C corresponde un seul point de $\mathcal{C}$, et qu'à un point de $\mathcal{C}$ correspondent n points de C : c'est ce qu'on appelle une *transformation* $(1, n)$.

8. Réciproquement si deux courbes C et $\mathcal{C}$ sont liées par une transformation $(1, n)$ la courbe C admet une involution, d'espèce un, dont les groupes sont formés par les n points qui correspondent à un point de $\mathcal{C}$; cette involution n'est pas rationnelle, du moins si la courbe $\mathcal{C}$ n'est pas unicursale. En effet, d'après les raisonnements du paragraphe précédent, aux ϖ différentielles de première espèce appartenant à $\mathcal{C}$ correspondent ϖ différentielles de première espèce, $\gamma(x)\,dx$, appartenant à C, et qui gardent la même valeur en tous les points d'un groupe.

9. Observons encore que la relation

$$\gamma(x)\,dx = \mathcal{G}(X)\,dX$$

montre que les points de C où s'annule $\gamma(x, y)$ sont : 1° les points

qui correspondent aux points de $\mathfrak{C}$ où s'annule $\mathcal{G}(X, Y)$; 2° les points où $\frac{dx}{dX}$ devient infini, c'est-à-dire les points doubles de l'involution sur la courbe C. Or l'intégrale $\gamma(x)\,dx$ est de la forme $\frac{F(x,y)}{f'_y}\,dx$, $F(x, y)$ étant le premier membre de l'équation d'une courbe adjointe à C, d'ordre $n-3$; les points où $\gamma(x, y)$ s'annule sont, comme on sait, les points (non singuliers) où la courbe $F(x, y) = 0$ coupe C, et sont en nombre égal à $2(p-1)$. En désignant par d le nombre des points doubles de l'involution, on a donc la relation

$$2(p-1) = 2(\varpi-1)n + d\ (^1),$$

qui montre que p est toujours supérieur à ϖ (²).

10. Les considérations précédentes établissent également qu'une courbe C, de genre p, lorsqu'elle admet une involution non rationnelle, a nécessairement ϖ intégrales de première espèce réductibles au genre ϖ ($\varpi < p$); la réciproque n'est pas exacte en général, mais elle le devient si $\varpi = 1$.

En ce cas, en effet, par hypothèse, une intégrale abélienne $\int g(x, y)\,dx$, appartenant à C, se réduit à une intégrale elliptique de première espèce; si donc on pose

$$\int g(x, y)\,dx = u,$$

à chaque point (x, y) de C correspond, par cette équation, une seule valeur de u, à des périodes près, et, par suite, un seul point d'une courbe quelconque, $\mathfrak{C}$ de genre un, dont les coordonnées des points sont fonctions doublement périodiques de u. Inversement à un point

(¹) Cette formule est un cas particulier de la formule de M. Zeuthen, relative aux genres de deux courbes qui se correspondent algébriquement.

(²) Il y a exception toutefois si $p = \varpi = 1$ et $d = 0$. L'involution sur la courbe de genre un, C, est alors formée par les points dont les arguments elliptiques sont de la forme $u + \frac{k\mathfrak{P}}{n}$, $\mathfrak{P}$ étant une période et k un entier variable de 0 à $n-1$.

de $\mathfrak{C}$ correspondent n points de C, n étant un nombre entier bien déterminé, puisque la relation entre les deux courbes est évidemment algébrique.

11. En résumé :

Sur une courbe algébrique, les involutions d'espèce supérieure à l'unité sont :

1° *Ou des involutions dont l'espèce est égale à l'ordre, c'est-à-dire dont chaque groupe est formé par n points arbitraires de la courbe;*

2° *Ou des involutions rationnelles, c'est-à-dire dont les groupes sont ceux que découpent, sur la proposée, des courbes appartenant à un même système linéaire.*

Les involutions non rationnelles, en dehors de celles dont l'espèce égale l'ordre, sont toutes d'espèce un, et il n'en existe pas sur une courbe prise au hasard.

Si une courbe C, de genre p, admet une involution non rationnelle d'espèce un, elle est liée à une courbe $\mathfrak{C}$, de genre ϖ ($\varpi < p$), de telle sorte qu'à un point de C corresponde un point de $\mathfrak{C}$ et qu'à un point de $\mathfrak{C}$ correspondent n points de C; les groupes de n points ainsi définis sur $\mathfrak{C}$ forment l'involution.

La réciproque de cette dernière proposition est vraie (¹).

En désignant par d le nombre des points doubles de l'involution, on a

$$2(p-1) = 2n(\varpi - 1) + d.$$

Enfin, si l'on appelle *genre* de l'involution le nombre ϖ qui représente le genre de la courbe $\mathfrak{C}$, on peut dire que :

Toute courbe qui a une intégrale de première espèce réductible aux intégrales elliptiques admet une involution de genre un, et réciproquement.

12. *Remarque I.* — Une courbe C ne peut admettre une infinité

(¹) Si l'involution de première espèce est rationnelle, le théorème s'applique encore, seulement la courbe $\mathfrak{C}$ est unicursale.

continue d'involutions non rationnelles (d'espèce un). Supposons, en effet, qu'il y ait sur C une série d'involutions non rationnelles, d'ordre n, dépendant d'un paramètre; la dépendance sera évidemment algébrique.

Or on a trouvé, en désignant par $g(x)\,dx$ une différentielle de première espèce quelconque sur C, la relation (6),

$$(6) \qquad g(x_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n)\,dx_n = \gamma(x_1)\,dx_1;$$

s'il y a une série continue d'involutions d'ordre n, $\gamma(x)\,dx$ sera une différentielle abélienne de la forme

$$\gamma(x)\,dx = \lambda_1 g_1(x)\,dx + \lambda_2 g_2(x)\,dx + \ldots + \lambda_p g_p(x)\,dx,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ étant des fonctions algébriques d'une variable, v. Une au moins de ces fonctions devenant infinie pour une valeur convenable de v, le second membre de (6), ou plutôt son intégrale (par rapport à x_1) serait infini pour cette valeur de v [1], tandis que l'intégrale au premier membre garde toujours une valeur finie. Il y a donc une contradiction, et, par suite :

Sur une courbe algébrique il ne peut exister une série continue d'involutions irrationnelles de même ordre.

15. *Remarque II.* — Le cas d'une involution irrationnelle du second ordre ($n = 2$) mérite une mention spéciale. Les relations (8)

---

[1] Le second membre de (6) devient bien infini si une ou plusieurs des quantités λ deviennent infinies, car pour des valeurs de v voisines de la valeur critique v_0, on peut le mettre sous la forme

$$\frac{1}{(v - v_0)^h}\,[\lambda'_1 g_1(x_1)\,dx_1 + \ldots + \lambda'_p g_p(x_1)\,dx_1] + \ldots,$$

$\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$ étant des constantes, et les termes non écrits étant négligeables devant le premier. Or le coefficient de $(v - v_0)^{-h}$ ne peut être nul, puisque $g_1(x)\,dx, \ldots, g_p(x)\,dx$ sont linéairement distincts.

et (9) s'écrivent alors

$$G_1(x_1)\,dx_1 + G_1(x_2)\,dx_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_q(x_1)\,dx_1 + G_q(x_2)\,dx_2 = 0,$$
$$\gamma_1(x_1)\,dx_1 + \gamma_1(x_2)\,dx_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_\varpi(x_1)\,dx_1 + \gamma_\varpi(x_2)\,dx_2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{G_1(x_1)}{G_1(x_2)} = \ldots = \frac{G_q(x_1)}{G_q(x_2)} = -\frac{\gamma_1(x_1)}{\gamma_1(x_2)} = \ldots = -\frac{\gamma_\varpi(x_1)}{\gamma_\varpi(x_2)}.$$

Il en résulte la proposition suivante :

Soit C *une courbe de degré* n *et de genre* p, *admettant une involution irrationnelle d'ordre deux et de genre* ϖ; *appelons* points associés *les deux points d'un même couple de l'involution. Le système linéaire des courbes d'ordre* $n-3$ *adjointes à* C *peut se décomposer en deux systèmes linéaires, l'un* $\varpi - 1$ *fois, l'autre* $p - \varpi - 1$ *fois infini, et n'ayant aucune courbe commune : chaque courbe de l'un quelconque des systèmes ne coupe la courbe* C, *en dehors de points fixes, qu'en des couples de points associés.*

On voit aussi sans difficulté que :

Toute courbe adjointe d'ordre $n-3$ *qui passe par* ϖ *couples de points associés choisis au hasard ne coupe en outre la courbe* C *qu'en d'autres couples de points associés.*

DEUXIÈME MÉMOIRE.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES ALGÉBRIQUES A GÉNÉRATRICES UNICURSALES.

---

1. Soit $\mathfrak{S}$ une surface algébrique admettant des génératrices unicursales, c'est-à-dire sur laquelle on peut tracer une série infinie et continue de courbes unicursales d'un même ordre, m. On peut exprimer les coordonnées d'un point quelconque de cette surface, en fonction de deux paramètres, d'une manière intéressante.

Une courbe unicursale quelconque d'ordre m, de l'espace, est représentable, en coordonnées homogènes, par des équations de la forme

$$(1) \qquad \rho x_i = a_i t^m + b_i t^{m-1} + \ldots + k_i t + l_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sont les quatre coordonnées d'un point de la courbe, ρ un facteur de proportionnalité, t un paramètre variable et $a_i, b_i, \ldots, l_i$ des constantes. Comme on peut remplacer t par $\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ sans changer la forme des équations (1), on a le droit d'admettre que trois des coefficients $\frac{a_i}{a_1}, \frac{b_i}{a_1}, \ldots, \frac{l_i}{a_1}$ ont des valeurs données *a priori*.

Écrivons maintenant que la courbe (1) est sur la surface $\mathfrak{S}$, dont l'équation est $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$: nous obtenons, en remplaçant dans cette équation $x_1, \ldots, x_4$ par leurs valeurs proportionnelles (1) et annulant les coefficients de toutes les puissances de t, un certain nombre d'équations algébriques entre les constantes $a_i, b_i, \ldots, l_i$. Comme la surface admet, par hypothèse, une série infinie de courbes unicursales d'ordre m, ces équations devront se ramener à des relations, en nombre inférieur de une unité au moins, au nombre des coefficients $\frac{a_i}{a_1}, \ldots, \frac{l_i}{a_1}$, ou plutôt au nombre de ceux de ces coefficients qui ne sont pas fixes. Si le nombre des relations est inférieur de $k+1$

unités à celui des coefficients, ce qui arrivera seulement dans le cas où la surface $\mathfrak{S}$ admettra une série $k+1$ fois infinie de courbes unicursales d'ordre m, on établira entre les a_i, b_i, ..., l_i, k relations algébriques tout à fait quelconques, de telle sorte que le nombre total des équations entre les coefficients soit inférieur de une unité au nombre de ceux-ci.

Alors, en toute hypothèse, l'ensemble de ces équations algébriques permettra d'exprimer les coefficients $\frac{a_i}{a_1}$, ..., $\frac{l_i}{a_1}$ en fonction fuchsienne d'un paramètre, u, et nous aurons ainsi la représentation cherchée de la surface $\mathfrak{S}$ à l'aide de deux paramètres t et u, sous la forme

$$(2) \qquad \rho x_i = a_i(u)t^m + b_i(u)t^{m-1} + \ldots + l_i(u) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les fonctions $a_i(u)$, ..., $l_i(u)$ étant des fonctions fuchsiennes de la variable u.

Nous nous bornons à indiquer ici ce mode de représentation sur lequel nous aurons à revenir pour une étude plus approfondie et qui conduit à des résultats géométriques intéressants, relatifs, par exemple, à la théorie des surfaces adjointes d'un ordre quelconque.

2. Si dans les équations (2) on fait $u = \text{const.}$, on obtient une courbe unicursale d'ordre m, ce qui donne une série simplement infinie de ces courbes, ainsi qu'on devait s'y attendre. Inversement, à une courbe unicursale de la série peuvent correspondre plusieurs valeurs de u (abstraction faite de celles qui se déduisent de l'une d'elles par les substitutions du groupe fuchsien); ces valeurs sont en involution, c'est-à-dire que les points qui ont ces valeurs pour arguments sur une courbe algébrique, C, dont les coordonnées sont des fonctions fuchsiennes quelconques de u (dépendant du groupe fuchsien considéré), forment sur cette courbe une involution d'espèce un : la proposition est évidente, puisque, si un de ces points est donné, les autres le sont d'une manière unique et symétrique.

Par conséquent on peut dire, en vertu des résultats du Mémoire précédent, qu'à une courbe unicursale tracée sur $\mathfrak{S}$, de la série considérée, correspond un seul point d'une courbe algébrique $\mathcal{C}$, et réciproquement : cette propriété était absolument évidente *a priori*, mais il

n'était pas sans intérêt de la rattacher à la représentation paramétrique de $\mathfrak{S}$.

Dans ce qui suit nous désignerons par ϖ le genre de la courbe *fondamentale* $\mathcal{E}$, par ξ un quelconque de ses points et par (ξ) la courbe unicursale tracée sur $\mathfrak{S}$ qui correspond à ce point.

3. Nous nous bornerons, dans ce Mémoire, à l'étude des surfaces algébriques sur lesquelles on peut tracer une série simplement infinie de courbes unicursales, telle qu'il passe n courbes $(n > 1)$ de la série par un point quelconque de la surface, les courbes de la série se coupant deux à deux en *un point mobile* seulement.

Il est bien évident, dans ce cas, que les points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de $\mathcal{E}$, qui correspondent aux courbes unicursales $(\xi_1), \ldots, (\xi_n)$ passant par un *même* point de $\mathfrak{S}$, forment les groupes d'une involution d'espèce deux : si l'on se donne en effet les points ξ_1 et ξ_2, on se donne les courbes (ξ_1) et (ξ_2), et, par suite, leur point unique d'intersection sur $\mathfrak{S}$; on détermine donc sans ambiguïté les courbes $(\xi_3), \ldots, (\xi_n)$ qui passent par ce point et, par suite, les points correspondants $\xi_3, \ldots, \xi_n$ de $\mathcal{E}$.

L'involution, I, ainsi définie est donc rationnelle, d'après les propositions du premier Mémoire, ou bien elle est d'ordre deux, et dans ce cas, par un point de $\mathfrak{S}$ ne passent que deux courbes unicursales de la série.

Examinons successivement les deux hypothèses.

4. Si l'involution d'espèce deux, I, est rationnelle, ses groupes sont découpés sur $\mathcal{E}$ par les courbes d'un système linéaire deux fois infini,

$$F(\xi, \eta) + \lambda\varphi(\xi, \eta) + \mu\psi(\xi, \eta) = 0, \tag{3}$$

λ et μ désignant deux paramètres variables.

D'après ce qui vient d'être dit, à un point de $\mathfrak{S}$ correspond un groupe de l'involution I, c'est-à-dire un système de valeurs de λ, μ, et réciproquement; en d'autres termes, la surface $\mathfrak{S}$ est représentable, point par point, sur le plan des variables λ, μ.

Dans ce mode de représentation, à une courbe unicursale (ξ) de la série considérée, tracée sur $\mathfrak{S}$, correspond un seul point ξ_0, η_0 de Σ; par suite, les valeurs de λ, μ qui correspondent à un point de cette courbe unicursale sont liées par la relation (3), où x, y ont les valeurs x_0, y_0,

$$(4) \qquad F(\xi_0, \eta_0) + \lambda\varphi(\xi_0, \eta_0) + \mu\psi(\xi_0, \eta_0) = 0.$$

Ainsi, sur le plan des λ, μ, une courbe unicursale de $\mathfrak{S}$ a pour image une droite. Les droites ainsi obtenues ne passent pas par un même point, sinon par un point arbitraire du plan; on ne pourrait en mener qu'une, ce qui revient à dire que, par un point de $\mathfrak{S}$, on ne pourrait mener qu'une courbe unicursale de la série, contrairement à l'hypothèse. Les droites images des courbes unicursales enveloppent donc une courbe proprement dite (de classe n) [1].

Cela posé, nous savons que les coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{S}$ sont des polynomes entiers en λ et μ : le degré de ces polynomes, qui est celui des courbes images des sections planes de $\mathfrak{S}$, est nécessairement égal à m, m étant toujours l'ordre des courbes unicursales de la série, car cet ordre est aussi égal au nombre des points d'intersection des droites (4), qui n'ont aucun point fixe commun, avec les images des sections planes de $\mathfrak{S}$.

A toute droite du plan des λ, μ correspond dès lors, sur $\mathfrak{S}$, une courbe, évidemment unicursale, et d'ordre m; la surface admet donc une série *doublement* infinie de courbes unicursales d'ordre m, ayant pour images les droites du plan et se coupant deux à deux en un point mobile. Inversement, il est clair que toute surface représentable point par point sur un plan, de telle sorte que ses sections planes aient pour images des courbes d'ordre m, admettra une série doublement infinie de courbes unicursales d'ordre m, se coupant deux à deux en un seul point mobile : ces courbes sont celles qui ont pour images les droites du plan.

---

[1] Cette courbe ne peut se décomposer en courbes de classe moindre, sinon la série considérée de courbes unicursales sur $\mathfrak{S}$ se décomposerait en plusieurs autres.

5. Si l'involution d'espèce deux, I, est d'ordre 2, par un point de $\mathfrak{S}$ ne passent que deux courbes unicursales de la série; donc, à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent deux points de la courbe $\mathfrak{C}$, et réciproquement. Le lieu des points de $\mathfrak{S}$ qui correspondent à deux points de $\mathfrak{C}$, dont l'un, ξ, est fixe, et dont l'autre est mobile, est la courbe unicursale (ξ); cette courbe correspond donc, point par point, à la courbe $\mathfrak{C}$, qui est par suite *unicursale*.

Ainsi, à chaque point de $\mathfrak{S}$ correspondent deux points d'une courbe $\mathfrak{C}$, unicursale; réciproquement, à deux points de la courbe unicursale correspond un point de $\mathfrak{S}$, qui reste le même quand on permute les deux précédents : si donc t_1 et t_2 désignent les paramètres qui correspondent à ces deux points sur leur courbe, et si l'on pose $t_1 + t_2 = \lambda$, $t_1 t_2 = \mu$, on voit qu'à chaque système de valeurs de λ et μ correspond un point de $\mathfrak{S}$, et réciproquement. La surface est donc représentable, point par point, sur le plan des λ, μ.

Les courbes unicursales de la série (ξ) correspondent individuellement aux points de $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire à des valeurs constantes de t_1 ou de t_2; les relations

$$t_1^2 - \lambda t_1 + \mu = 0,$$
$$t_2^2 - \lambda t_2 + \mu = 0$$

montrent que ces courbes ont pour images, sur le plan des λ, μ, les droites

$$\theta^2 - \lambda\theta + \mu = 0,$$

où θ désigne un paramètre variable, et qui enveloppent la conique $\lambda^2 - 4\mu = 0$. On en conclut, comme au n° 4, que les sections planes de $\mathfrak{S}$ ont pour images des courbes d'ordre m, et l'on n'obtient ainsi qu'un cas particulier des surfaces trouvées tout à l'heure.

6. Voici donc le théorème final :

Si l'on peut tracer, sur une surface algébrique, une série simplement infinie de courbes unicursales, de même ordre m, se coupant deux à deux en un point mobile, la surface est représentable point par point sur le plan. Elle admet une série linéaire doublement infinie de courbes unicursales d'ordre m, se coupant deux à deux en un point et dont fait partie la série primitive; ces courbes

ont pour images les droites du plan et les sections planes de la surface ont pour images des courbes quelconques d'ordre m.

L'ordre de la surface est, d'après cela, inférieur à m^2; on peut même dire que toutes les surfaces jouissant de la propriété énoncée sont des variétés ou des dégénérescences d'une même surface, d'ordre m^2.

7. Une application intéressante se fait immédiatement au cas de $m = 2$. Soit, en effet, une surface admettant une famille simplement infinie de coniques, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points. Si elles se coupent en plus de deux points, la surface est évidemment plane; si elles se coupent en deux points, la surface est évidemment la quadrique qui passe par trois d'entre elles; si enfin elles se coupent deux à deux en un point, le théorème précédent nous apprend que la surface est représentable point par point sur le plan, les images des sections planes étant des coniques. C'est donc une *surface de Steiner* ou une dégénérescence d'une telle surface. Par suite :

Toute surface sur laquelle on peut tracer une série simplement infinie de coniques, de telle sorte qu'il passe plus d'une conique de la série par chaque point de la surface, est une surface de Steiner, ou une dégénérescence de cette surface [1].

---

[1] Les résultats de ce Mémoire et ceux du précédent ont été communiqués verbalement à la Société Mathématique, dans la séance du 21 décembre 1892; le procès-verbal de la séance mentionne explicitement le théorème sur les surfaces engendrées par des coniques qui se coupent deux à deux, en le rattachant à la théorie des involutions sur les courbes algébriques (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XX, p. 121). Dans une Note, présentée le 12 juin 1893 à l'Académie des Sciences et publiée dans la huitaine, j'ai donné un résumé complet de ces recherches. De son côté, un géomètre italien, M. Castelnuovo, a présenté à l'Académie des Sciences de Turin, le 11 juin 1893, un travail sur les mêmes questions, travail qui n'a été publié que postérieurement à ma Note des *Comptes rendus*, puisque l'auteur cite cette Note.

M. Castelnuovo établit le théorème fondamental des involutions sur les courbes planes par une méthode analogue à la mienne. Il en déduit en particulier un théorème général un peu plus étendu que celui du n° 6, sur les surfaces engendrées par des courbes se coupant deux à deux en un seul point.

TROISIÈME MÉMOIRE.

DES SÉRIES DE COURBES ALGÉBRIQUES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES.

---

1. Soit, sur une surface algébrique S, une série algébrique simplement infinie de courbes algébriques, σ, de même ordre m, se coupant deux à deux en k points mobiles ($k \geq 1$). A chaque courbe σ on peut faire correspondre un point d'une courbe algébrique plane Σ, et, réciproquement, à chaque point de Σ correspond une courbe σ : cela résulte de ce qu'un être algébrique à une dimension, dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, peut toujours être représenté point par point sur une courbe algébrique plane.

Par un point quelconque M de S, de coordonnées (ξ, η, ζ), passent n courbes σ, n étant supérieur à un, puisque, par hypothèse, deux quelconques de ces courbes se coupent en des points mobiles; désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) les coordonnées de n points correspondants sur Σ et par $g(x, y)\,dx$ une différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe Σ. La somme

$$(1) \qquad g(x_1, y_1)\,dx_1 + g(x_2, y_2)\,dx_2 + \ldots + g(x_n, y_n)\,dx_n$$

est évidemment, si on l'exprime en fonction des coordonnées ξ, η, ζ du point M, une différentielle totale de la forme $\mathrm{N}\,d\xi + \mathrm{P}\,d\eta$, N et P étant rationnels en ξ, η, ζ, car, si l'on se donne le point ξ, η, ζ, les points correspondants (x_i, y_i) sont déterminés d'une manière unique.

L'intégrale de l'expression (1) ne devenant infinie en aucun point de Σ, l'intégrale $\int \mathrm{N}\,d\xi + \mathrm{P}\,d\eta$ ne devient infinie en aucun point de S : c'est, par suite, ce que M. Picard appelle une *intégrale de différentielle totale de première espèce*.

2. Admettons maintenant que la surface S n'ait pas d'intégrales de

cette nature : N et P seront nuls identiquement et il viendra

$$(2) \qquad g(x_1, y_1)\,dx_1 + \ldots + g(x_n, y_n)\,dx_n = 0,$$

quelle que soit la différentielle de première espèce, $g(x, y)\,dx$, dont on est parti.

Il résulte de là, en vertu d'un théorème fondamental de la théorie des courbes algébriques, que les n points (x_i, y_i), qui correspondent à un point ξ, η, ζ de S, forment des groupes, en nombre doublement infini, qui appartiennent à un *système de groupes*, c'est-à-dire que ces groupes sont compris parmi les groupes de n points mobiles découpés sur la courbe $\mathfrak{S}$ par les courbes d'une même famille linéaire

$$(3) \qquad \lambda_1 \varphi_1(x, y) + \lambda_2 \varphi_2(x, y) + \ldots + \lambda_\rho \varphi_\rho(x, y) = 0,$$

où les λ sont des constantes et ρ un entier supérieur à deux. Nous avons déjà fait usage de cette proposition au n° **5** du premier Mémoire.

Observons de plus, comme à ce numéro, qu'on peut supposer qu'il n'existe aucune relation identique de la forme

$$(4) \quad \mu_1 \varphi_1(x, y) + \mu_2 \varphi_2(x, y) + \ldots + \mu_\rho \varphi_\rho(x, y) = P(x, y) f(x, y)$$

les μ étant des constantes, $P(x, y)$ un polynome et $f(x, y)$ le premier membre de l'équation de $\mathfrak{S}$.

Si l'on se donne un point ξ, η, ζ de S, les points $x_1, \ldots, x_n$ correspondants sur $\mathfrak{S}$ seront déterminés d'une seule manière ; comme ils sont à l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une courbe du système linéaire (3), il faut aussi que cette courbe soit déterminée d'une seule manière, c'est-à-dire que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_\rho}{\lambda_1}$ soient des fonctions rationnelles de ξ, η, ζ. On peut dire, si l'on veut, que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ seront égaux à des polynomes entiers en ξ, η, ζ, que nous désignerons par

$$\mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta), \quad \ldots, \quad \mathcal{F}_\rho(\xi, \eta, \zeta).$$

Quelques-uns de ces polynomes peuvent être identiquement nuls et les autres peuvent ne pas être linéairement distincts sur la surface S.

D'après cela, les courbes du système linéaire (3), qui découpent sur $\mathcal{C}$ les groupes de points $x_1, \ldots, x_n$ correspondant à un point ξ, η, ζ de S, ont pour équation générale

$$\mathcal{F}_1(\xi,\eta,\zeta)\,\varphi_1(x,y)+\mathcal{F}_2(\xi,\eta,\zeta)\,\varphi_2(x,y)+\ldots+\mathcal{F}_\rho(\xi,\eta,\zeta)\,\varphi_\rho(x,y)=0.$$

En désignant par $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_r$ ceux des polynomes $\mathcal{F}$ qui sont linéairement distincts sur la surface S [1], cette équation prend la forme

$$(5)\qquad \mathcal{F}_1(\xi,\eta,\zeta)\,\psi_1(x,y)+\ldots+\mathcal{F}_r(\xi,\eta,\zeta)\,\psi_r(x,y)=0,$$

où les polynomes $\psi(x,y)$ sont des combinaisons linéaires et homogènes des φ. Ces polynomes ψ, d'après leur mode de formation, sont linéairement distincts; on peut donc admettre qu'il n'existe aucune relation identique de la forme (4),

$$(4\,bis)\qquad \begin{cases} \mu_1\psi_1(x,y)+\mu_2\psi_2(x,y)+\ldots+\mu_r\psi_r(x,y) \\ \qquad = P(x,y)\,f(x,y). \end{cases}$$

5. Cela posé, dans l'équation (5) considérons x et y comme des paramètres, vérifiant toujours l'équation $f(x,y)=0$ de la courbe $\mathcal{C}$, et regardons ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes : nous obtenons ainsi une série, simplement infinie, de surfaces algébriques, et nous désignerons par F_i celle des surfaces dont l'équation s'obtient en remplaçant x et y dans (5) par les coordonnées d'un point x_i, y_i de $\mathcal{C}$.

Je dis que la surface F_i coupe la surface S suivant la courbe σ_i qui correspond, sur cette dernière, au point x_i, y_i de $\mathcal{C}$. En effet, d'après ce qui précède, l'équation (5), où l'on regarde ξ, η, ζ comme données et x, y comme inconnues, est vérifiée pour les n points (non fixes) de la courbe $\mathcal{C}$ qui correspondent aux n courbes σ passant par le point

---

[1] D'après cela, il n'existe aucune relation identique de la forme

$$\theta_1\mathcal{F}_1(\xi,\eta,\zeta)+\ldots+\theta_r\mathcal{F}_r(\xi,\eta,\zeta)=Q(\xi,\eta,\zeta)\,S(\xi,\eta,\zeta)$$

les θ étant des constantes, Q un polynome et S le premier membre de l'équation de la surface S.

ξ, η, ζ de la surface S; donc, inversement, si x, y sont donnés, l'équation (5) exprime que le point ξ, η, ζ de S est situé sur la courbe σ correspondant au point x, y de $\mathfrak{C}$. En d'autres termes, la surface F_i ne coupe S, en dehors de courbes fixes, communes à toutes les surfaces F, que suivant la courbe σ_i ([1]).

4. Considérons maintenant les surfaces représentées par l'équation générale

$$(6)\qquad \theta_1 \mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta) + \theta_2 \mathcal{F}_2(\xi, \eta, \zeta) + \ldots + \theta_r \mathcal{F}_r(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

que nous appellerons surfaces $\mathcal{F}$; $\theta_1, \ldots, \theta_r$ désignant des constantes arbitraires. Les surfaces $\mathcal{F}$ forment un système linéaire, dont font partie les surfaces (5) que nous avons appelées F; nous allons établir qu'elles passent par tous les points fixes communs aux surfaces F et même qu'elles ont, en ces points, les mêmes singularités que les surfaces F.

En effet, si ξ_0, η_0, ζ_0 est un point commun à toutes les surfaces (5), on a

$$(7)\qquad \mathcal{F}_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\,\psi_1(x, y) + \ldots + \mathcal{F}_r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\,\psi_r(x, y) = 0$$

quel que soit le point x, y, sur la courbe $\mathfrak{C}$. En d'autres termes, le premier membre de (7) doit être divisible par le premier membre $f(x, y)$ de l'équation de $\mathfrak{C}$, ce qui donne une identité, en x, y, de la forme (4 *bis*) : or une telle identité n'est possible que si tous les coefficients des fonctions ψ sont nuls; on a donc

$$\mathcal{F}_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{F}_r(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 0,$$

et, par suite, les surfaces $\mathcal{F}$ passent toutes par le point ξ_0, η_0, ζ_0.

([1]) La surface F_i ne touche pas S le long de la courbe σ_i. S'il en était ainsi, la surface (5) où x, y sont remplacés par les constantes x_i, y_i, et la surface infiniment voisine, obtenue en remplaçant x, y par les coordonnées du point voisin de x_i, y_i sur la courbe $\mathfrak{C}$, se couperaient suivant la courbe σ_i : en d'autres termes, si l'on désigne par ξ, η, ζ un point de S situé sur cette courbe, la courbe plane définie par l'équation (5), où x, y sont des coordonnées courantes, toucherait $\mathfrak{C}$ au point x_i, y_i. Cette conclusion est inadmissible, puisque les courbes (3) ou (5) découpent sur $\mathfrak{C}$ un groupe de n points mobiles, qui sont distincts pour la courbe (5) la plus générale.

Si les surfaces F ont au point ξ_0, η_0, ζ_0 une singularité commune, par exemple un point double, on aura, quel que soit le point x, y de $\mathfrak{S}$,

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \xi_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_1(x, y) + \ldots + \frac{\partial \mathfrak{f}_r}{\partial \xi_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_r(x, y) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \eta_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_1(x, y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial \zeta_0}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\psi_1(x, y) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Ces relations étant encore linéaires par rapport aux ψ entraînent

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_i}{\partial \xi_0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}_i}{\partial \eta_0} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}_i}{\partial \zeta_0} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ce qui montre que les surfaces $\mathfrak{f}$ admettent le point ξ_0, η_0, ζ_0 pour point double.

D'une manière générale, si les surfaces F ont en un point une singularité *commune*, on exprimera ce fait analytiquement par des relations *linéaires* et *homogènes* par rapport aux coefficients qui figurent dans leur équation, c'est-à-dire par rapport à

$$\psi_1(x, y), \quad \ldots, \quad \psi_r(x, y):$$

ces relations devant avoir lieu quel que soit le point x, y sur la courbe $\mathfrak{S}$ seront des identités, et auront lieu quelles que soient les valeurs de ces coefficients. En d'autres termes, les surfaces $\mathfrak{f}$ posséderont au même point la singularité considérée.

La conclusion de cette discussion est que les surfaces $\mathfrak{f}$ ont les mêmes singularités fixes que les surfaces F; en particulier, elles passent par toutes les courbes fixes communes à S et aux surfaces F, avec les mêmes singularités que celles-ci, et de là résultent deux conséquences :

1° Chaque surface $\mathfrak{f}$ coupe S, en dehors des courbes fixes, suivant une courbe ayant le même degré, m, que les courbes σ découpées par les surfaces F; car les surfaces F et $\mathfrak{f}$ sont de même ordre et présen-

tent les mêmes singularités le long des courbes fixes qu'elles ont en commun avec S.

2° Les courbes mobiles, s, découpées sur S par les surfaces $\mathcal{F}$ ont, *en général*, le même genre que les courbes σ. Il en sera du moins ainsi lorsque les courbes σ n'auront pas de points multiples mobiles en dehors de ceux qui peuvent être situés sur les lignes multiples de S; de plus, si chaque courbe σ a une singularité en un point non fixe, d'une ligne multiple, $\mathcal{L}$, de S, il faudra, pour que la proposition s'applique, que cette singularité soit *linéaire*. Nous voulons dire par là que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intersection avec S d'une surface quelconque présente, le long de $\mathcal{L}$, la même singularité doivent être linéaires par rapport aux coefficients de la surface inconnue. Ce dernier point résulte de ce que les surfaces $\mathcal{F}$ ont les mêmes singularités fixes que les surfaces F.

Il peut évidemment arriver que les courbes σ soient de genre inférieur à celui des courbes s; on en a un exemple immédiat en supposant que les surfaces F soient celles du système linéaire $\mathcal{F}$ qui touchent en un ou plusieurs points (mobiles) la surface S.

5. Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes généraux suivants :

I. *Sur une surface algébrique n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série quelconque, simplement infinie, de courbes algébriques se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire deux fois infinie au moins) de courbes du même ordre.*

Dans le cas où les courbes de la série considérée *ne se coupent pas* (en des points mobiles), on peut recommencer des raisonnements analogues. Soient $\mathcal{C}$ la courbe dont chaque point correspond univoquement à une courbe de la série, $g(x, y)\,dx$ une de ses différentielles de première espèce. Par un point (ξ, η, ζ) de S ne passe qu'une courbe de la série; si x, y est le point correspondant sur $\mathcal{C}$, la différentielle $g(x, y)\,dx$ est une différentielle totale de première espèce sur la surface S : celle-ci n'admettant pas de différentielle de cette nature,

$g(x, y)$ est nul, c'est-à-dire que la courbe $\mathfrak{C}$ est unicursale. Les points d'une telle courbe sont découpés individuellement sur elle par un faisceau de courbes algébriques

$$\lambda_1 \varphi_1(x, y) + \lambda_2 \varphi_2(x, y) = 0;$$

et le point (x, y) de $\mathfrak{C}$ qui correspond à un point (ξ, η, ζ) de S sera donné par une relation de la forme

$$\mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta) \varphi_1(x, y) + \mathcal{F}_2(\xi, \eta, \zeta) \varphi_2(x, y) = 0;$$

on en conclut, par les raisonnements des nos **3** et **4**, que les surfaces

$$\theta_1 \mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta) + \theta_2 \mathcal{F}_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

découpent sur S les courbes de la série considérée; cette série est donc linéaire. Par suite, dans tous les cas :

II. *Sur une surface n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, les courbes algébriques d'un même ordre se répartissent en une ou plusieurs séries linéaires* [1].

Ce théorème suppose, bien entendu, qu'il existe une *infinité continue* de courbes algébriques de l'ordre considéré : il ne s'applique pas aux courbes isolées, qui peuvent être en nombre fini.

Dans ces énoncés, on entend, par *série linéaire* de courbes, des courbes découpées sur la surface fixe par des surfaces appartenant à un même système linéaire, chaque surface mobile ne coupant la proposée, en dehors des courbes fixes, que suivant *une seule* courbe mobile.

La proposition exprimée par le théorème précédent peut n'être pas vraie pour une surface ayant des intégrales de différentielles totales de

---

[1] On a aussi établi que : *Sur une surface sans intégrales de différentielles totales de première espèce, un système simplement infini de courbes du même ordre, ne se coupant deux à deux en aucun point mobile, est un système linéaire.*

première espèce. Par exemple, sur un cône de genre supérieur à zéro, les génératrices ne forment pas une série linéaire, car on ne peut les découper individuellement par les surfaces d'un faisceau. De même une surface réglée, d'ordre quatre et de genre un, admet une double infinité de courbes planes du troisième ordre (de genre un), situées dans ses plans tangents : par deux points de la surface passent évidemment *deux* de ces courbes, ce qui prouve que la série n'est pas linéaire.

6. Une autre conséquence des raisonnements du n° **4** est celle-ci :

III. *Soit, sur une surface qui n'a pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série simplement infinie de courbes algébriques du même ordre, n'ayant aucun point multiple mobile en dehors des lignes multiples de la surface* ([1]) : *cette série est comprise dans une série linéaire (doublement infinie au moins) de courbes du même ordre et du même* genre.

APPLICATION AUX SURFACES A GÉNÉRATRICES UNICURSALES.

7. Les surfaces à génératrices unicursales n'ont pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, lorsque les génératrices unicursales se coupent deux à deux en un ou plusieurs points mobiles. En effet, d'après les équations (2) du deuxième Mémoire, une surface, $\mathfrak{S}$, engendrée par des courbes rationnelles peut être représentée par des équations de la forme

$$\rho x_i = a_i(u)t^m + \ldots + k_i(u)t + l_i(u) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où t est un paramètre et $a_i, \ldots, l_i$ des fonctions fuchsiennes d'un second paramètre, u. En posant $\xi = \frac{x_1}{x_4}$, $\eta = \frac{x_2}{x_4}$, $\zeta = \frac{x_3}{x_4}$, toute expression

([1]) Pour plus de précision dans cet énoncé, *voir* le n° 4 (2°).

de la forme $N\,d\xi + P\,d\eta$, où N et P sont rationnels en ξ, η, ζ, s'écrira sur la surface

$$(8) \qquad \Phi(t, u)\,dt + \Psi(t, u)\,du;$$

$F(t, u)$ est une fonction rationnelle par rapport à t et fuchsienne par rapport à u; $\Phi(t, u)$ est fonction rationnelle de t et fonction thêtafuchsienne d'ordre un (pouvant devenir infinie) par rapport à u. Pour que l'intégrale de l'expression (8) reste finie, il est nécessaire qu'elle ne dépende pas de t, c'est-à-dire que $\Phi(t, u)$ soit identiquement nul, et que $\Psi(t, u)$ se réduise à une fonction thêtafuchsienne de u, d'ordre un et sans infinis; en d'autres termes, une différentielle totale de première espèce sur la surface se ramène nécessairement au type $\theta(u)\,du$, c'est-à-dire à une différentielle de première espèce du groupe fuchsien considéré.

Or, d'après ce qui a été dit au n° **2** du deuxième Mémoire, à une valeur de u correspond sur la surface $\mathfrak{S}$ une courbe unicursale et inversement à une courbe unicursale correspond un groupe de valeurs de u. Par suite, à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent autant de séries de valeurs de u qu'il y a de courbes unicursales passant par ce point, et la fonction $\int \theta(u)\,du$ n'a pas une valeur unique (à des périodes près) en chaque point de $\mathfrak{S}$, puisque, d'après l'hypothèse, il passe par ce point plus d'une courbe unicursale, et que deux courbes unicursales se coupent en un point mobile, au moins.

Donc enfin la surface $\mathfrak{S}$ n'admet pas de différentielles totales de première espèce, et le théorème du n° **6** lui est applicable. Par conséquent :

Si l'on peut tracer sur une surface algébrique, $\mathfrak{S}$, *une série simplement infinie de courbes unicursales se coupant deux à deux en plus d'un point mobile, et n'ayant pas de point singulier mobile en dehors des lignes multiples de* $\mathfrak{S}$, *il existera, sur la surface, une série linéaire, deux fois infinie au moins, de courbes unicursales comprenant la série primitive.*

Or M. Nöther a établi qu'une surface qui admet une série linéaire,

simplement infinie au moins, de courbes unicursales est représentable point par point sur le plan ([1]). Donc :

La surface $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le plan.

8. A titre d'exemple, nous allons chercher à déterminer les surfaces engendrées par des *cubiques gauches* se coupant deux à deux en un point au moins.

Toutes ces surfaces, d'après le théorème précédent, sont représentables point par point sur le plan ; le cas des cubiques se coupant deux à deux en un seul point mobile a été examiné dans le second Mémoire : la surface correspondante est du neuvième ordre et ses sections planes ont pour images des courbes quelconques du troisième ordre ; ses variétés et ses dégénérescences donnent également des solutions de la question.

Pour traiter les autres cas, nous nous appuierons sur un important théorème de M. Guccia relatif à la réduction des systèmes linéaires de courbes unicursales planes ([2]).

Voici ce théorème :

Un système linéaire de courbes unicursales tel que deux courbes du système se coupent en k points mobiles est réductible, au moyen de transformations Cremona, aux types suivants :

1° *Système de courbes d'ordre $\frac{k+2}{2}$ ayant en commun un point multiple ordinaire d'ordre $\frac{k}{2}$ et un point simple ;*

2° *Système de courbes d'ordre $\frac{k+s+1}{2}$ $(0 \leqq s \leqq k-1)$ ayant en commun un point multiple d'ordre $\frac{k+s-1}{2}$ avec s tangentes fixes, communes en ce point à toutes les courbes ;*

3° *Système de coniques sans point commun* $(k=4)$;

4° *Système des droites du plan* $(k=1)$.

([1]) *Mathem. Annalen*, t. III.

([2]) *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, t. I, p. 152.

Supposons que les cubiques génératrices se coupent deux à deux en k points ($k \geqq 2$), et distinguons successivement les hypothèses

$$k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Pour $k = 2$, le système des courbes *unicursales* qui sont les images sur le plan des cubiques gauches tracées sur la surface se ramène, d'après le théorème de M. Guccia, à l'un des systèmes ci-dessous :

1° Système de coniques ayant deux points communs distincts, a_1 et a_2 ;

2° Système de coniques ayant un point commun et même tangente en ce point.

Désignons par N l'ordre des courbes images des sections planes de la surface; par h_1 et h_2 les ordres des points multiples qu'elles possèdent aux points a_1 et a_2 dans la première hypothèse, ces ordres pouvant être nuls. Pour que les coniques passant par a_1, a_2 soient les images de courbes de l'espace du troisième ordre, il faut qu'elles coupent en trois points mobiles les images des sections planes, c'est-à-dire que l'on ait

$$3 = 2N - h_1 - h_2.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$h_1 + h_2 \leqq N,$$

$$h_1 < N; \qquad h_2 < N,$$

et, de plus, on devra supposer

$$h_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad h_2 > 0.$$

Si, en effet, h_1 est nul, les courbes d'ordre N ne passent pas par a_1, et, puisque les coniques menées par a_1 et a_2 coupent ces courbes en trois points non fixes, le même fait a lieu pour les coniques passant seulement par a_2; en d'autres termes, les coniques menées par a_2 sont les images de cubiques gauches, tracées sur la surface, se coupant deux à deux en *trois* points mobiles, et la surface est, en réalité, engendrée par des cubiques qui se coupent deux à deux en trois points.

Cela posé, on tire des relations précédentes l'inégalité

$$N \geqq 2N - 3, \quad \text{c'est-à-dire} \quad N \leqq 3,$$
$$2N - 3 \geqq 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad N \geqq 3.$$

On a donc la seule solution $N = 3$, avec $h_1 + h_2 = 3$, c'est-à-dire $h_1 = 2$, $h_2 = 1$. Les images des sections planes de la surface sont donc des cubiques planes ayant un point double en a_1 et un point simple en a_2 : la surface est la *surface unicursale réglée d'ordre quatre*.

La seconde hypothèse conduit à la même conclusion.

On traiterait d'une manière tout à fait pareille le cas de $k = 3$ et celui de $k = 4$; dans le premier cas, on trouve la surface réglée du troisième ordre (pouvant devenir un cône unicursal), et dans le second une quadrique.

Pour $k \geqq 5$, la même méthode montre que la surface cherchée n'existe pas. Donc :

La surface la plus générale engendrée par des cubiques gauches *se coupant deux à deux en k points mobiles* ($k \geqq 2$) *est la surface réglée unicursale d'ordre* $6 - k$.

Le nombre k ne peut dépasser 4.

Une discussion analogue se fait sans difficulté pour les surfaces engendrées par des unicursales sans point multiple, d'un ordre donné, se coupant deux à deux en plus d'un point.

Note au sujet du Mémoire précédent;

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

Le Mémoire de M. Humbert me donne l'occasion de revenir sur quelques points de la théorie des transformations rationnelles des courbes algébriques, dont je me suis occupé incidemment dans mon Mémoire *Sur les équations différentielles du premier ordre* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1891).

Je rectifierai d'abord une égalité inexacte qui figure au Chapitre II de ce Mémoire (n° 5). Soient

$$(1) \qquad F(x, y) = 0$$

et

$$(2) \qquad F_1(x_1, y_1) = 0$$

les équations de deux courbes algébriques, la première de genre $p > 1$, la seconde de genre p_1, et admettons qu'on puisse passer de (1) à (2) par la transformation rationnelle

$$(3) \qquad x = g(x_1, y_1), \qquad y = h(x_1, y_1)$$

telle qu'à un point arbitraire de (1) correspondent μ points variables de (2). A l'égalité

$$\mu(p-1) = p_1 - 1$$

du paragraphe cité, il faut substituer l'*inégalité* [1]

$$(4) \qquad \mu(p-1) \leqq p_1 - 1.$$

Cette substitution ne change d'ailleurs absolument rien à la suite du Mémoire où l'égalité en question ne joue qu'un rôle secondaire et n'intervient que pour fournir une limite *supérieure* de μ : $\frac{p_1 - 1}{p-1}$, limite qui subsiste *a fortiori*.

L'inégalité (4) est la conséquence même du raisonnement que j'ai employé. Soient en effet m et m_1 les degrés de (1) et de (2), P et Q deux polynomes *adjoints quelconques* de degré $(m-3)$ de (1), P_1 et Q_1 deux polynomes analogues de (2). La transformation (3) vérifie une égalité de la forme

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}.$$

A chaque courbe adjointe (C) ou $\frac{P}{Q} = h$ de (1) correspond ainsi une courbe (C_1) ou $\frac{P_1}{Q_1} = h_1$ de (2). Aux $2(p-1)$ points M d'intersection de C avec (1) (variables avec h), correspondent $2\mu(p-1)$ points M_1 communs à C_1 et à (2), variables avec h_1 ; d'où l'inégalité

$$(4) \qquad (p-1)\mu \leqq p_1 - 1.$$

Comme, d'autre part, on peut, moyennant une transformation convenable effectuée sur (1), supposer qu'un des rapports $\frac{P}{Q}$ se réduit identiquement à x, le nombre des points M_1 variables avec h_1 est précisément égal à $2\mu(p-1)$. Mais les courbes C_1 (faisceau linéaire à p paramètres) peuvent avoir [en dehors des points multiples de (2)] des

---

[1] C'est d'ailleurs cette *inégalité* (et l'inégalité correspondante relative aux surfaces) qui figure dans tous mes autres travaux tant antérieurs que postérieurs au Mémoire cité (*voir* notamment mes Notes *Sur les transformations rationnelles des surfaces et les applications aux équations différentielles du second ordre* (*Comptes rendus*, janvier, février 1890; janvier, février 1893; novembre 1893).

points fixes, parmi lesquels j peuvent se trouver précisément sur la courbe (2) : ce qui entraîne l'égalité

$$(5) \qquad 2(p_1 - 1) = 2\mu(p - 1) + j.$$

Cette égalité est d'ailleurs conforme à la formule de M. Zeuthen, retrouvée directement par M. Humbert dans ce cas particulier (p. 180).

J'ai montré dans le Mémoire cité que toutes les courbes (1) de genre plus grand que 1, dont une courbe *donnée* (2) est la transformée rationnelle, ne forment qu'un nombre fini de classes, et qu'on peut déterminer algébriquement un type de chaque classe ainsi que les substitutions (3) correspondantes qui sont aussi en nombre fini. La même question se trouve résolue par le fait même quand on admet seulement que *x et y sont des fonctions uniformes du point analytique (x_1, y_1) sans lignes singulières;* j'entends par là que x et y sont des fonctions à m_1 valeurs de x_1 sans *coupures*. Je dis que *x et y sont alors nécessairement algébriques en x_1, donc rationnels en x_1, y_1*. Autrement, en effet, ces deux fonctions admettraient au moins un point essentiel $x_1 = a_1$ dans le voisinage duquel x et y seraient uniformes en $x_1 - a_1$, ou en $(x_1 - a_1)^{\frac{1}{n}}$, et d'après un théorème de M. Picard la relation entre x et y devrait être de genre zéro ou 1.

Quand p est nul, x et y s'expriment rationnellement en t, et t en x, y, et l'on peut passer de (1) à une courbe (2) quelconque par la transformation *uniforme*

$$t = \mathrm{F}(x_1, y_1),$$

où F est une fonction *uniforme* quelconque du point analytique (x_1, y_1).

Quand p est égal à 1, x et y sont fonctions doublement périodiques d'un paramètre t tel qu'à tout point x, y de (1) corresponde une seule valeur de t (abstractions faites des valeurs congruentes $t + m\omega + m\omega'$ si ω et ω' sont ces périodes). On obtient toutes les transformations uniformes de (1) en une courbe *quelconque* (2) en faisant

$$t = \int \mathrm{F}(x_1, y_1)\, dx_1,$$

F désignant une fonction uniforme du point analytique x_1, y_1 dont l'intégrale a toutes ses périodes de la forme $m\omega + m\omega'$. En particulier, on peut prendre pour t une fonction uniforme de x_1, y_1. Observons que le genre p_1 de (2) peut être nul, comme on le voit, en prenant $t = x_1$.

Ce qui précède suppose essentiellement que x et y soient sans coupures.

Commentaire aux principes de la Thermodynamique (¹);

Par M. P. DUHEM.

TROISIÈME PARTIE.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME EN ÉQUILIBRE (²).

1. *Le potentiel thermodynamique interne.* — Soient

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \Im) \qquad \text{et} \qquad S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \Im)$$

l'énergie interne et l'entropie d'un système. Ce système est, bien en-

(¹) Voir t. VIII, p. 269, et t. IX, p. 293.

(²) Nous avons développé en détail les propriétés thermodynamiques des systèmes en équilibre dans un Mémoire récent : *Sur les équations générales de la Thermodynamique* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. VII, p. 231). Pour éviter autant que possible de reproduire ici ce Mémoire, nous avons limité le présent Chapitre à l'exposé des propriétés indispensables pour l'intelligence des Chapitres suivants.

tendu, soumis aux restrictions indispensables pour la définition de l'entropie; en particulier, la température $\mathfrak{T}$ a la même valeur en chacun de ses points.

Posons

$$(1) \qquad \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}) = \mathrm{E}[\mathrm{U}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}) - \mathrm{F}(\mathfrak{T})\mathrm{S}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})].$$

La fonction $\mathcal{F}$ sera, comme les fonctions U et S, une fonction *uniforme* et continue des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$; comme les fonctions U et S, elle sera indépendante de celles de ces variables qui servent seulement à fixer la position absolue du système dans l'espace.

Les deux quantités U et S étant chacune déterminées à une constante près, la fonction $\mathcal{F}$ est déterminée à une fonction près de la température, cette fonction de la température étant de la forme

$$\mathrm{C} + \mathrm{C}'\mathrm{F}(\mathfrak{T}),$$

où C et C′ sont deux constantes arbitraires.

Cette fonction $\mathcal{F}$ est une généralisation de l'une des *fonctions caractéristiques* de M. Massieu; c'est l'*available energy* de M. Gibbs et de Maxwell, la *freie Energie* de M. H. von Helmholtz. Nous lui donnerons le nom de *potentiel thermodynamique interne du système*.

Entre les actions A, B, ..., L, Θ, qui maintiennent le système en équilibre et les coefficients calorifiques du système en équilibre R_α, R_β, ..., R_λ, C, nous avons les relations [IIe Partie, Chap. III, égalités (2)],

$$(2) \qquad \begin{cases} R_\alpha = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} - \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{E}}, \\ R_\beta = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \beta} - \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{E}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda} - \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}}, \\ \mathrm{C} = \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathfrak{T}} - \dfrac{\Theta}{\mathrm{E}}. \end{cases}$$

D'autre part, nous avons [IIe Partie, Chap. III, égalités (16)],

$$(3)\quad \begin{cases} R_\alpha = F(\mathfrak{Z})\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ R_\beta = F(\mathfrak{Z})\dfrac{\partial S}{\partial \beta}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ R_\lambda = F(\mathfrak{Z})\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ C = F(\mathfrak{Z})\dfrac{\partial S}{\partial \mathfrak{Z}}. \end{cases}$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent sans peine

$$(4)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha}, \\ B = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta}, \\ \dots\dots\dots, \\ L = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda}, \\ \Theta = \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{Z}} + ES\dfrac{dF(\mathfrak{Z})}{d\mathfrak{Z}}. \end{cases}$$

Si à ces équations on joint la condition que les corps étrangers au système aient la même température que lui, on obtient les *conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système.*

La dernière égalité (4) donne

$$(5)\quad ES = \frac{1}{\dfrac{dF(\mathfrak{Z})}{d\mathfrak{Z}}}\left(\Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{Z}}\right).$$

Les égalités (1) et (5) donnent

$$(6)\quad EU = \mathfrak{F} + \frac{F(\mathfrak{Z})}{\dfrac{dF(\mathfrak{Z})}{d\mathfrak{Z}}}\left(\Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{Z}}\right).$$

Les égalités (3) et (5) donnent

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
R_\alpha &= \frac{F(\vartheta)}{\dfrac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\vartheta\,\partial\alpha}\right),\\
R_\beta &= \frac{F(\vartheta)}{\dfrac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\beta} - \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\vartheta\,\partial\beta}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
R_\lambda &= \frac{F(\vartheta)}{\dfrac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda} - \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\vartheta\,\partial\lambda}\right),\\
C &= \frac{F(\vartheta)}{\dfrac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta} - \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\vartheta^2}\right) - \frac{F(\vartheta)\,F''(\vartheta)}{[F'(\vartheta)]^2}\left(\Theta - \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\vartheta}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi donc, *si l'on connaît :*

1° *L'expression du potentiel thermodynamique interne du système;*

2° *L'expression*

$$\Theta = f_\vartheta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta)$$

de la quantité Θ *relative au système en équilibre,*

On peut déterminer :

1° *L'énergie interne et l'entropie du système dans un état quelconque;*

2° *Les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système;*

3° *Les coefficients calorifiques du système en équilibre.*

C'est la généralisation d'une proposition bien connue de M. Massieu.

2. *Propriétés d'un système formé de plusieurs parties indépendantes qui ont la même température.* — Pour ne pas compliquer les raisonnements sans avantage au point de vue de la généralité, nous supposerons que le système soit seulement formé de deux parties distinctes, indépendantes l'une de l'autre, que nous désignerons par les indices 1 et 2. Chacune de ces deux parties sera supposée à la même

température en tous ses points; $\mathfrak{S}_1$ sera la température de la partie 1 et $\mathfrak{S}_2$ la température de la partie 2; pour le moment, nous supposerons ces températures quelconques; tout à l'heure, nous leur imposerons la condition d'être égales entre elles.

Soient α_1, β_1, ..., λ_1, $\mathfrak{S}_1$ les variables indépendantes qui déterminent l'état du système 1, y compris sa position absolue dans l'espace; l'énergie interne, l'entropie, le potentiel thermodynamique interne du système 1 seront des fonctions uniformes de ces variables, ou, du moins, de celles d'entre elles qui ne servent pas uniquement à déterminer la position absolue du système dans l'espace; désignons respectivement ces trois fonctions par

$$\Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1),$$
$$\Sigma_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1),$$
$$\mathcal{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1).$$

Soient, de même, α_2, β_2, ..., λ_2, $\mathfrak{S}_2$ les variables indépendantes qui définissent l'état du système 2. Soient

$$\Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2),$$
$$\Sigma_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2),$$
$$\mathcal{F}_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2)$$

l'énergie interne, l'entropie et le potentiel thermodynamique interne du système 2.

L'état du système complexe (1, 2), formé par l'ensemble des deux systèmes 1 et 2, et sa position absolue dans l'espace sont déterminés lorsqu'on connaît l'ensemble des variables

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad \mathfrak{S}_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \lambda_2, \quad \mathfrak{S}_2.$$

L'énergie interne de ce système (1, 2) aura donc pour valeur

$$(8) \qquad \begin{cases} U = \Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1) \\ \qquad + \Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2) \\ \qquad + X_{12}(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2), \end{cases}$$

X_{12} étant une fonction uniforme des variables mises en évidence, ou,

du moins, de celles de ces variables qui ne servent pas uniquement à fixer la position absolue du système (1, 2); en outre, on peut convenir de prendre cette fonction égale à o lorsque les deux systèmes 1 et 2 sont infiniment éloignés l'un de l'autre.

Si nous désignons par U' l'énergie interne des corps étrangers au système (1, 2), l'énergie interne du système formé par le système (1, 2) et par les corps extérieurs aura pour valeur

$$\upsilon = U + U' + \Psi. \tag{9}$$

La fonction Ψ dépendra des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \Xi_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \Xi_2$, et aussi des variables qui déterminent l'état des corps extérieurs au système (1, 2).

Les actions extérieures exercées sur le système (1, 2) auront pour valeurs [Ire Partie, Chap. III, égalités (4)],

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{A}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}, & \mathcal{A}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2}, \\ \mathcal{B}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_1}, & \mathcal{B}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{L}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1}, & \mathcal{L}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2}, \\ \mathcal{C}_1 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\Xi_1}, & \mathcal{C}_2 = -E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\Xi_2}. \end{array}\right.$$

D'autre part, les corps extérieurs au système 1 se composent :

1° Des corps extérieurs au système (1, 2);

2° Du corps 2.

Dès lors, il est facile de voir que les actions extérieures appliquées au système 1 ont pour valeurs

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(X_{12} + \Psi), \\ B_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(X_{12} + \Psi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}(X_{12} + \Psi), \\ \Theta_1 = -E\dfrac{\partial}{\partial\Xi_1}(X_{12} + \Psi). \end{array}\right.$$

De même, les actions extérieures au système 2 ont pour valeurs

$$(11\ bis)\qquad \begin{cases} A_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(X_{12}+\Psi), \\ B_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\beta_2}(X_{12}+\Psi), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(X_{12}+\Psi), \\ \Theta_2 = -E\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{S}_2}(X_{12}+\Psi). \end{cases}$$

Tout cela est général. Supposons maintenant que le système (1, 2) soit en équilibre, et appliquons ce principe, qui ressort évidemment de la définition de l'équilibre : *pour que le système* (1, 2) *soit en équilibre, il faut et il suffit que chacun des deux systèmes* 1 *et* 2 *soient en équilibre.*

Pour que le système 1 soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait, en premier lieu,

$$(12)\qquad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S},$$

$\mathfrak{S}$ étant la température commune des corps extérieurs au système (1, 2);

En second lieu, en vertu des égalités (4) et (11),

$$(13)\qquad \begin{cases} E\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\alpha_1}, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\beta_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\lambda_1}, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{S}_1}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\mathfrak{S}_1} - EF'(\mathfrak{S}_1)\Sigma_1. \end{cases}$$

Pour que le système 2 soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait :

En premier lieu les égalités (12);

En second lieu, en vertu des égalités (4) et (11 *bis*),

$$(13\ bis)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\beta_2}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\beta_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}, \\ E\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{Z}_2}(X_{12}+\Psi) = -\dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\mathfrak{Z}_2} - EF'(\mathfrak{Z}_2)\Sigma_2. \end{cases}$$

Lorsque les égalités (12) sont satisfaites, le système (1, 2) a un potentiel thermodynamique interne que nous désignerons par $\mathcal{F}$ et une entropie que nous désignerons par S.

En général, le travail virtuel des forces extérieures appliquées à ce système est exprimé par

$$\mathcal{A}_1\,\delta\alpha_1 + \mathcal{B}_1\,\delta\beta_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\,\delta\lambda_1 + \mathfrak{T}_1\,\delta\mathfrak{Z}_1 + \mathcal{A}_2\,\delta\alpha_2 + \mathcal{B}_2\,\delta\beta_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\,\delta\lambda_2 + \mathfrak{T}_2\,\delta\mathfrak{Z}_2,$$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{L}_1, \mathfrak{T}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{L}_2, \mathfrak{T}_2$ étant donnés par les égalités (10). Dans le cas particulier où les égalités (12) sont constamment vérifiées, ce travail virtuel devient

$$\mathcal{A}_1\,\delta\alpha_1 + \mathcal{B}_1\,\delta\beta_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\,\delta\lambda_1 + \mathcal{A}_2\,\delta\alpha_2 + \mathcal{B}_2\,\delta\beta_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\,\delta\lambda_2 + \mathfrak{T}\,\delta\mathfrak{Z},$$

$\mathfrak{T}$ étant défini par l'égalité

$$(14)\qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = -E\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Z}_1} + \frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{Z}_2}\right)_{\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{Z}_2=\mathfrak{Z}}.$$

Dès lors, pour l'équilibre du système (1, 2), il faut et il suffit que l'on ait :

En premier lieu, les égalités (12);

En second lieu, en vertu des égalités (4), (10) et (14), les égalités

$$(15)\quad \begin{cases} E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha_1}, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha_2}, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_1} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta_1}, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\beta_2} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\beta_2}, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda_1}, & E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\lambda_2}, \\ E\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{I}_1} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{I}_2}\right) = -\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{I}} - EF'(\mathfrak{I})S. \end{cases}$$

Le principe énoncé il y a un instant exige que, moyennant les égalités (12), l'ensemble des égalités (15) soit équivalent à l'ensemble des égalités (13) et (13 *bis*); cette condition s'exprime par les égalités

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(\mathfrak{F} - \mathcal{F}_1 - EX_{12}) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(\mathfrak{F} - \mathcal{F}_2 - EX_{12}) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(\mathfrak{F} - \mathcal{F}_1 - EX_{12}) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial\beta_2}(\mathfrak{F} - \mathcal{F}_2 - EX_{12}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}(\mathfrak{F} - \mathcal{F}_1 - EX_{12}) = 0, & \dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(\mathfrak{F} - \mathcal{F}_2 - EX_{12}) = 0, \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathfrak{I}} - \dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{I}_1}(\mathcal{F}_1 + EX_{12}) - \dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{I}_2}(\mathcal{F}_2 + EX_{12}) \\ \qquad + EF'(\mathfrak{I})(S - \Sigma_1 - \Sigma_2) = 0. \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{F}_1$ ne dépend pas des variables $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$; la fonction $\mathcal{F}_2$ ne dépend pas des variables $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$; les égalités (16) peuvent donc s'écrire

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha_1}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta_1}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda_2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) = 0. \end{cases}$$

En vertu des égalités (12), on a

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathfrak{S}_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathfrak{S}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathfrak{S}_2} = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathfrak{S}}.$$

En vertu de ces mêmes égalités, X_{12} peut être regardé comme une fonction des variables

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \lambda_2, \quad \mathfrak{S},$$

et l'on a

$$\frac{\partial X_{12}}{\partial \mathfrak{S}} = \frac{\partial X_{12}}{\partial \mathfrak{S}_1} + \frac{\partial X_{12}}{\partial \mathfrak{S}_2}.$$

L'égalité (17) peut donc s'écrire

$$(19) \qquad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{S}}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathfrak{F}) + EF'(\mathfrak{S})(\Sigma_1 + \Sigma_2 - S) = 0.$$

Les égalités (18) donnent

$$(20) \qquad \mathfrak{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} + f(\mathfrak{S}),$$

$f(\mathfrak{S})$ étant une fonction arbitraire de la température $\mathfrak{S}$; l'égalité (19) donne alors

$$(21) \qquad S = \Sigma_1 + \Sigma_2 - \frac{f'(\mathfrak{S})}{EF'(\mathfrak{S})}.$$

Si l'on convient de prendre pour potentiel thermodynamique interne d'un système formé de deux parties à la même température, infiniment éloignées l'une de l'autre, la somme des potentiels thermodynamiques internes des deux parties, on aura identiquement, d'après l'égalité (20),

$$f(\mathfrak{S}) = 0.$$

Les égalités (20) et (21) deviendront donc

$$(20\ bis) \qquad \mathfrak{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12},$$

$$(21\ bis) \qquad S = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes, toutes à la même température, le potentiel thermodynamique interne du système s'obtient en faisant la somme des potentiels thermodynamiques internes des parties, et en y ajoutant l'une des déterminations du potentiel des actions mutuelles de ces parties, celle qui s'annule lorsqu'on éloigne infiniment ces parties les unes des autres.

L'entropie du système est égale à la somme des entropies des diverses parties.

Ces théorèmes ont de fréquentes applications en Thermodynamique; on peut les rapprocher d'un théorème analogue, relatif à l'énergie interne, démontré dans la Ire Partie (Chap. III, n° 2); mais ce dernier était général, tandis que les théorèmes que nous venons de démontrer supposent que les diverses parties du système sont à la même température, et que chacune d'elles vérifie les conditions indiquées au Chapitre III de la IIe Partie.

L'égalité (21 *bis*) entraîne une nouvelle conséquence importante:

Les coefficients calorifiques du système 1 en équilibre sont

$$R_{\alpha_1}, \quad R_{\beta_1}, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_1}, \quad C_1.$$

Les coefficients calorifiques du système 2 en équilibre sont

$$R_{\alpha_2}, \quad R_{\beta_2}, \quad \ldots, \quad R_{\lambda_2}, \quad C_2.$$

Les coefficients calorifiques du système (1, 2) en équilibre sont

$$\rho_{\alpha_1}, \quad \rho_{\beta_1}, \quad \ldots, \quad \rho_{\lambda_1}, \quad \rho_{\alpha_2}, \quad \rho_{\beta_2}, \quad \ldots, \quad \rho_{\lambda_2}, \quad \gamma.$$

Nous avons, en vertu des égalités (3),

$$\rho_{\alpha_1} = F(\Im)\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \qquad \rho_{\alpha_2} = F(\Im)\frac{\partial S}{\partial \alpha_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\rho_{\lambda_1} = F(\Im)\frac{\partial S}{\partial \lambda_1}, \qquad \rho_{\lambda_2} = F(\Im)\frac{\partial S}{\partial \lambda_2},$$
$$\gamma = F(\Im)\frac{\partial S}{\partial \Im}.$$

Si l'on tient compte de l'égalité (21 *bis*) et si l'on observe que

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \alpha_1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \lambda_1} = 0,$$

on pourra écrire

$$\rho_{\alpha_1} = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \alpha_1}, \qquad \rho_{\alpha_2} = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \alpha_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho_{\lambda_1} = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda_1}, \qquad \rho_{\lambda_2} = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \lambda_2},$$
$$\gamma = F(\mathfrak{S}) \left(\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \mathfrak{S}} + \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \mathfrak{S}} \right),$$

ou bien, en vertu des égalités (3),

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \rho_{\alpha_1} = R_{\alpha_1}, & \rho_{\alpha_2} = R_{\alpha_2}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \rho_{\lambda_1} = R_{\lambda_1}, & \rho_{\lambda_2} = R_{\lambda_2}, \\ \multicolumn{2}{c}{\gamma = C_1 + C_2.} \end{array} \right.$$

Ces remarquables égalités (22) sont soumises aux mêmes restrictions que l'égalité (21 *bis*).

5. *Hypothèse fondamentale; variables normales.* — Nous allons maintenant invoquer une hypothèse fondamentale qui, en général, est admise implicitement dans les traités de Thermodynamique.

Soit un système indépendant 1, ayant la même température en tous ses points, défini par des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1$; soit ensuite un autre système indépendant quelconque 2, n'ayant pas forcément la même température en tous ses points, défini par des variables α_2, $\beta_2, \ldots, \lambda_2$, formé des corps étrangers au système 1.

L'énergie interne U du système (1, 2) pourra s'écrire

$$\begin{aligned} U = \; & \Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1) \\ & + \Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2) \\ & + \Psi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2), \end{aligned}$$

Υ_1 étant l'énergie interne du système 1 et Υ_2 l'énergie interne du système 2.

L'hypothèse que nous voulons énoncer est la suivante :

On peut choisir les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$, de telle sorte :

1° Que lorsque $\mathfrak{S}_1$ varie, $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ gardant des valeurs constantes, aucun point matériel du système 1 ne se déplace dans l'espace; la force vive $\mathfrak{T}_1$ du système 1 est alors indépendante de $\mathfrak{S}_1$ et de $\frac{d\mathfrak{S}_1}{dt}$;

2° Que la fonction Ψ ne dépend pas de la variable $\mathfrak{S}_1$, et cela quels que soient les corps qui composent le système 2.

Lorsque les variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ ont été choisies de la sorte, nous dirons que *le système* $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1$ *forme un système de variables normales* définissant le système 1.

Le travail virtuel des actions extérieures auxquelles est soumis le système 1 est une expression de la forme

$$A_1\,\delta\alpha_1 + B_1\,\delta\beta_1 + \ldots + L_1\,\delta\lambda_1 + \Theta_1\,\delta\mathfrak{S}_1.$$

D'après les égalités (4) du Chapitre III (Ire Partie), on a

$$\Theta_1 = - E\frac{\partial\Psi}{\partial\mathfrak{S}_1}.$$

Si donc le système de variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1$ est un système de variables normales, on a

$$\Theta_1 = 0.$$

Si un système, ayant la même température en tous ses points, est défini par des variables normales, quels que soient les corps étrangers à ce système, les actions qu'ils exercent sur ce système n'effectuent aucun travail lorsque la température du système varie seule.

Cette proposition ne suppose pas le système en équilibre.

Que deviennent les propriétés d'un système en équilibre lorsqu'il est défini par des variables normales?

Pour un tel système, la quantité

$$\Theta = f_{\mathfrak{z}}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z})$$

est identiquement nulle.

Dès lors, les équations (4), (5), (6) et (7) deviennent

$$(4\ bis)\qquad \mathrm{A} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{L} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda},$$

$$(5\ bis)\qquad \mathrm{EF}'(\mathfrak{z})\,\mathrm{S} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}},$$

$$(6\ bis)\qquad \mathrm{EU} = \mathcal{F} - \frac{\mathrm{F}(\mathfrak{z})}{\mathrm{F}'(\mathfrak{z})}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}},$$

$$(7\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}_\alpha &= -\frac{\mathrm{F}(\mathfrak{z})}{\mathrm{EF}'(\mathfrak{z})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \mathfrak{z}},\\ \mathrm{R}_\beta &= -\frac{\mathrm{F}(\mathfrak{z})}{\mathrm{EF}'(\mathfrak{z})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta\,\partial \mathfrak{z}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathrm{R}_\lambda &= -\frac{\mathrm{F}(\mathfrak{z})}{\mathrm{EF}'(\mathfrak{z})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \mathfrak{z}},\\ \mathrm{C} &= -\frac{\mathrm{F}(\mathfrak{z})}{\mathrm{EF}'(\mathfrak{z})}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}^2} + \frac{\mathrm{F}(\mathfrak{z})\,\mathrm{F}''(\mathfrak{z})}{\mathrm{E}[\mathrm{F}'(\mathfrak{z})]^2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}}.\end{aligned}\right.$$

Lors donc qu'un système est défini par des variables normales, il suffit de connaître le potentiel thermodynamique interne de ce système pour pouvoir déterminer les équations d'équilibre, l'énergie, l'entropie et les coefficients calorifiques. C'est la proposition bien connue de M. F. Massieu.

Dorénavant, lorsque nous considérerons un système dont tous les points sont à la même température, nous le supposerons défini par des variables normales.

4. *Le problème de l'équilibre.* — Comment, en général, le pro-

blème de l'équilibre d'un système se pose-t-il, lorsqu'on connaît l'expression du potentiel thermodynamique interne de ce système?

On suppose donné l'état des corps extérieurs à ce système; ces corps sont portés à une température uniforme θ. On se propose de déterminer l'état pris par le système sous l'action de ces corps.

La fonction Ψ, considérée au numéro précédent, devient, puisque l'état des corps extérieurs au système est supposé déterminé, une fonction des seules variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, en désignant par $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$ les variables normales qui définissent le système.

En vertu des égalités (4) (Ire Partie, Chap. III) et des égalités (4 *bis*) du présent Chapitre, on a

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &E\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = 0,\\ &E\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &E\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on y joint l'équation

$$(24)\qquad \mathfrak{S} = \theta,$$

qui exprime l'égalité entre la température du système et celle des corps extérieurs, on aura un nombre d'équations égal au nombre des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$, dont on veut déterminer la valeur. Ces équations permettront donc de déterminer l'état d'équilibre du système, pourvu que l'on connaisse l'expression des quantités

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \beta},\quad \ldots,\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda},$$

en fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$; c'est-à-dire pourvu que l'on sache comment les actions extérieures appliquées au système varient avec l'état de ce système. D'ailleurs, si les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}$, sont des variables normales, ces actions ne dépendent pas de la température du système.

Une fois l'état du système connu, les équations (5 *bis*), (6 *bis*), (7 *bis*) en feront connaître l'énergie, l'entropie et les coefficients calorifiques.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME EN MOUVEMENT.

1. *Sens du mot mouvement.* — Nous prenons, dans ce Chapitre, le mot *mouvement* pour désigner non seulement un changement de position dans l'espace, mais encore un changement d'état quelconque, lors même qu'il ne serait accompagné d'aucun déplacement. Ainsi, il y aurait mouvement si les variables que nous avons désignées par a, b, ..., l (Ire Partie, Chap. III, nº 4) variaient seules, les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ gardant des valeurs fixes. De la sorte, le mot *mouvement* s'oppose non pas au mot *repos*, mais au mot *équilibre*.

2. *Mouvement d'un système qui a la même température en tous ses points.* — Imaginons un système qui ait la même température en tous ses points, cette température n'étant pas forcément celle des corps extérieurs; ce système n'est pas en équilibre; il s'agit de déterminer les lois de son mouvement.

A chaque instant t, l'état des corps extérieurs est supposé donné. Les actions extérieures qui agissent sur le système sont, en général, des fonctions des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, qui définissent le système, et des variables qui définissent les corps extérieurs; ces dernières étant des fonctions données de t, les actions extérieures sont, en définitive, des fonctions données de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t$; nous les désignerons par

$$A'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t),$$
$$B'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t).$$

Posons, pour abréger,

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \qquad \dots, \qquad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Lorsque le système est en équilibre, on a [Chap. I, égalités (23)],

$$A' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} = 0, \qquad B' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} = 0, \qquad \dots, \qquad L' - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} = 0.$$

D'autre part, on a identiquement

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta'} = 0, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} = 0.$$

On a donc, dans le cas où le système est en équilibre,

$$(1) \qquad \begin{cases} A' - \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} = 0, \\ B' - \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta'} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L' - \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} = 0. \end{cases}$$

Lorsque le système n'est pas en équilibre, il n'est pas certain que ces égalités soient vérifiées; les premiers membres pourront avoir des valeurs différentes de o; désignons par $-f_\alpha$, $-f_\beta$, ..., $-f_\lambda$ ces valeurs; nous pourrons écrire, *sans aucune hypothèse*,

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} + A' + f_\alpha = 0, \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \beta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta'} + B' + f_\beta = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{T} - \mathfrak{F})}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} + L' + f_\lambda = 0. \end{cases}$$

Les quantités f_α, f_β, ..., f_λ seront nommées les *résistances pas-*

sives que le système a à surmonter; la quantité

$$f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda$$

se nomme le *travail élémentaire des résistances passives.*

Jusqu'ici, nous l'avons dit, les équations (2) n'ont rien d'hypothétique; elles ne prennent un caractère hypothétique qu'à partir du moment où nous assignons une forme particulière aux résistances passives; or, voici, à cet égard, quelles suppositions nous ferons :

Première convention. — Les résistances passives f_α, f_β, ..., f_λ dépendent uniquement des variables

$$\alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \lambda,\quad \Im,$$
$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt},\qquad \beta' = \frac{d\beta}{dt},\qquad \ldots,\qquad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt},$$

relatives au système, et des variables analogues relatives aux corps extérieurs.

Deuxième convention. — Les résistances passives ne changent pas de valeur, si l'on change la position absolue ou le mouvement absolu du système complexe formé par le système étudié et les corps qui lui sont étrangers; elles ne dépendent que de la *position relative* des parties du système et des corps étrangers, du *mouvement relatif* des parties du système et des corps étrangers.

Comme toutes les hypothèses que nous faisons, ces suppositions, bien que très naturelles, n'ont rien de logiquement nécessaire; elles ne peuvent être vérifiées qu'en constatant l'accord des conséquences des équations (2) avec les faits d'expérience.

Lorsque l'état des corps extérieurs est donné à chaque instant t, les résistances passives deviennent des fonctions des variables

$$\alpha,\quad \beta,\quad \ldots,\quad \lambda,\quad \Im,\quad \alpha',\quad \beta',\quad \ldots,\quad \lambda',\quad t.$$

Les équations (2) deviennent alors des équations différentielles du second ordre, qui détermineraient les valeurs des variables α, β, ..., λ,

$\mathfrak{S}$, en fonction de t, et, partant, le mouvement du système, si elles étaient en nombre suffisant; mais *le nombre des variables dont il faut déterminer la valeur à chaque instant excède d'une unité le nombre des équations du mouvement fournies par la Thermodynamique;* il faudra donc, pour compléter la mise en équations du problème, emprunter une dernière équation à une théorie physique étrangère à la Thermodynamique; telle serait, par exemple, l'équation

$$\mathfrak{S} = \varphi(t)$$

qui ferait connaître à chaque instant la température du système.

3. *Coefficients calorifiques d'un système en mouvement.* — Les coefficients calorifiques d'un système animé d'un mouvement quelconque sont définis par les égalités [Ire Partie, Chap. III, égalités (12)],

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} - \mathrm{A}' = \mathrm{E}\mathrm{R}'_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} - \mathrm{L}' = \mathrm{E}\mathrm{R}'_\lambda, \\ \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathfrak{S}} = \mathrm{E}\mathrm{C}'. \end{array}\right.$$

Mais on a [Chap. I, égalités (1)],

$$\mathrm{EU} = \mathfrak{F} + \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\mathrm{S}.$$

Les égalités (3) peuvent donc s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} + \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha} - \mathrm{A}' = \mathrm{E}\mathrm{R}'_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} + \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda} - \mathrm{L}' = \mathrm{E}\mathrm{R}'_\lambda, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} + \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\dfrac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathfrak{S}} + \mathrm{E}\,\mathrm{F}'(\mathfrak{S})\mathrm{S} = \mathrm{E}\mathrm{C}', \end{array}\right.$$

ou bien, en tenant compte des égalités (2) du présent Chapitre et de l'égalité (5 *bis*) du Chapitre I,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\mathrm{R}'_\alpha = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha} + f_\alpha,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &\mathrm{E}\mathrm{R}'_\lambda = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda} + f_\lambda,\\ &\mathrm{E}\mathrm{C}' = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathfrak{S}}.\end{aligned}\right.$$

Soient $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C les coefficients calorifiques du système en équilibre dans l'état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$. Si nous comparons les égalités (4) que nous venons d'écrire aux égalités (3) du Chapitre I, nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}'_\alpha = \mathrm{R}_\alpha + \frac{f_\alpha}{\mathrm{E}},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &\mathrm{R}'_\lambda = \mathrm{R}_\lambda + \frac{f_\beta}{\mathrm{E}},\\ &\mathrm{C}' = \mathrm{C}.\end{aligned}\right.$$

La chaleur spécifique d'un système pris dans un état déterminé est la même, que le système soit en équilibre ou en mouvement; si l'on considère une variable autre que la température, le coefficient calorifique correspondant à cette variable n'a pas la même valeur, selon que le système est en équilibre ou en mouvement; la seconde valeur surpasse la première d'une quantité équivalente à la résistance passive qui correspond à cette variable.

4. *Propriété fondamentale des résistances passives.* — Soient A, B, ..., L les actions extérieures qui maintiendraient le système en équilibre dans l'état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S})$; ces forces sont données par les égalités (4 *bis*) du Chapitre I.

Les égalités (2) peuvent s'écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} A' - A &= -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} - f_\alpha,\\ B' - B &= -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta'} - f_\beta,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ L' - L &= -\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} - f_\lambda. \end{aligned}\right.$$

Nous donnerons aux quantités $(A' - A)$, $(B' - B)$, ..., $(L' - L)$ le nom d'*actions efficaces* exercées sur le système; à la quantité

$$(A' - A)\,d\alpha + (B' - B)\,d\beta + \ldots + (L' - L)\,d\lambda$$

le nom de *travail efficace*.

Les égalités (6), multipliées respectivement par $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, et ajoutées membre à membre, nous donnent

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(A' - A)\,d\alpha + (B' - B)\,d\beta + \ldots + (L' - L)\,d\lambda\\ &\qquad = d\mathfrak{T} - (f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda). \end{aligned}\right.$$

Cette égalité obtenue, voici l'hypothèse fondamentale que nous ferons :

Hypothèse. — *Le travail efficace des actions extérieures à un système est, dans toute transformation réelle, au moins égal à l'accroissement de force vive.*

D'après cette hypothèse, on a, dans toute transformation réelle,

$$(A' - A)\,d\alpha + (B' - B)\,d\beta + \ldots + (L' - L)\,d\lambda \geqq d\mathfrak{T},$$

et, par conséquent, d'après l'égalité (7),

$$(8)\qquad f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda \leqq 0.$$

L'hypothèse précédente équivaut donc à la proposition suivante :

Dans toute transformation réelle d'un système, le travail des résistances passives est nul ou négatif.

Multiplions de même par $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, $d\Xi$ les deux membres des équations (4) et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous aurons

$$\begin{aligned} & E(R'_\alpha\, d\alpha + R'_\beta\, d\beta + \ldots + R'_\lambda\, d\lambda + C\, d\Xi) \\ & \quad = EF(\Xi)\, dS + f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda, \end{aligned}$$

ou bien, en désignant par dQ la quantité de chaleur dégagée par le système dans une transformation élémentaire,

$$(9) \qquad E\, dQ = -EF(\Xi)\, dS - (f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda).$$

Écrivons une semblable égalité pour tous les éléments d'un cycle fermé et ajoutons membre à membre toutes ces égalités, après avoir divisé les deux membres de chacune d'elles par $F(\Xi)$; comme l'intégrale

$$\int dS,$$

étendue à un cycle fermé, est égale à o, nous aurons

$$\int \frac{dQ}{F(\Xi)} = -\frac{1}{E} \int \frac{f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda}{F(\Xi)}.$$

La quantité $(f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda)$ ne pouvant jamais être positive, on voit que, pour tout cycle fermé réel, on a

$$(10) \qquad \int \frac{dQ}{F(\Xi)} \geqq 0.$$

Cette inégalité célèbre est due à Clausius.

Clausius a donné à la quantité

$$-(f_\alpha\, d\alpha + f_\beta\, d\beta + \ldots + f_\lambda\, d\lambda),$$

qui est égale au travail des résistances passives changé de signe, et qui, par conséquent, n'est négative dans aucune modification réelle du système, le nom de *travail non compensé* accompli durant cette

modification. La quantité $EF(\mathfrak{S}) dS$ est au contraire, pour lui, le *travail compensé* accompli durant cette même modification.

D'après les égalités (2), on a

$$\begin{aligned}-(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda) \\ = A' d\alpha + B' d\beta + \ldots + L' d\lambda \\ - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} d\beta + \ldots + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} d\lambda\right) - d\mathfrak{T},\end{aligned}$$

ou bien, en désignant par $d\mathfrak{E}$ le travail des actions extérieures au système,

$$(11) \quad -(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda) = d\mathfrak{E} - d\mathfrak{T} - d\mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S}.$$

Dans le cas où la modification est isothermique, $d\mathfrak{S}$ est égal à 0, et l'égalité (11) devient

$$(11\ bis) \quad -(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda) = d\mathfrak{E} - d\mathfrak{T} - d\mathcal{F}.$$

Pour calculer le travail non compensé accompli dans une modification isothermique, prenez le travail externe et retranchez-en la somme des accroissements de la force vive et du potentiel thermodynamique interne. Ce théorème a de fréquentes applications.

Appliquons l'équation (9) aux transformations d'un système isolé dans l'espace; pour un pareil système, nous avons, par définition,

$$dQ = 0.$$

L'équation (9) devient donc

$$dS = -\frac{f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda}{EF(\mathfrak{S})}.$$

Le second membre ne peut être négatif pour aucune transformation réelle du système; donc, *aucune transformation réelle d'un système isolé ne peut faire décroître l'entropie de ce système.* On sait que cette proposition est due à Clausius; il l'avait démontrée seulement dans le cas où la force vive du système est égale à 0.

5. *Systèmes sans viscosité.* — Dans chaque cas particulier, on devra ajouter aux hypothèses déjà faites sur les résistances passives d'autres hypothèses propres à déterminer la forme des fonctions f_α, f_β, ..., f_λ.

Parmi ces hypothèses, la plus simple que l'on puisse faire, et qui est celle que l'on essayera toujours, au moins comme première approximation, consiste à faire

$$(12) \qquad f_\alpha = 0, \qquad f_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad f_\lambda = 0.$$

Lorsqu'on suppose satisfaites ces égalités (12), on dit que l'on suppose le système *dénué de viscosité.*

Pour étudier les propriétés des systèmes dénués de viscosité, distinguons les variables α, β, ..., λ, dont dépend la force vive des variables a, b, ..., l, qui n'y figurent pas; à ces dernières, doit être adjointe la température $\mathfrak{S}$.

Moyennant les égalités (12), les égalités (2) deviendront

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\mathfrak{T} - \mathcal{F})}{\partial\alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'} + A'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0, \\ \dotfill \\ \dfrac{\partial(\mathfrak{T} - \mathcal{F})}{\partial\lambda} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'} + L'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0, \end{cases}$$

$$(13\ bis) \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial a} + \mathcal{A}'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0, \\ \dotfill \\ -\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial l} + \mathcal{L}'(\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l, t) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont moins nombreuses que les variables à déterminer; pour achever de déterminer le mouvement du système, il faut leur adjoindre une dernière équation fournie par des hypothèses spéciales.

Ces équations appartiennent à deux types bien distincts. Les équations (13 *bis*), qui correspondent aux variables a, b, ..., l, sont des équations au sens ordinaire du mot. Les équations (13), au contraire, qui correspondent aux variables α, β, ..., λ, sont des équations aux dérivées partielles du second ordre du type donné par Lagrange.

L'équation supplémentaire, qui correspond à la variable θ, peut évidemment appartenir à un troisième type.

Dans le cas où cette équation supplémentaire fait connaître la température en fonction du temps, ce qui a lieu, en particulier, dans le cas où la température est constante, on peut traiter de la manière suivante le problème du mouvement du système.

On résoudra les équations (13 *bis*) par rapport à $a, b, \ldots, l$; on connaîtra ainsi $a, b, \ldots, l$, en fonctions de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{S}, t$ et, puisque $\mathfrak{S}$ est connu en fonction de t, en fonctions de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t$. Si l'on reporte ces valeurs des variables $a, b, \ldots, l$ dans la fonction $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l)$, celle-ci se transformera en une fonction des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t$, que nous désignerons par

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t).$$

De même, les fonctions

$$A'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l, t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$L'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l, t)$$

deviendront des fonctions des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t$, que nous désignerons par

$$\mathfrak{A}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathfrak{L}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t).$$

Les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ seront alors déterminées en fonction de t par les équations

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t) + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha} = \mathfrak{A}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{G}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t) + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda} = \mathfrak{L}'(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t), \end{cases}$$

qui ont la forme la plus générale des équations classiques de la Dynamique.

La méthode que nous venons d'indiquer est celle qui sert à étudier le mouvement des corps bons conducteurs électrisés, des corps parfaitement doux aimantés, etc.

Dans le cas du *problème classique de la Dynamique*, la question se présente sous une forme encore un peu plus simple. En Dynamique, on n'introduit pas la variable $\mathfrak{T}$; c'est supposer implicitement que la température garde une valeur invariable; les autres variables introduites figurent toutes dans l'expression de la force vive; le problème est donc ramené à l'intégration des équations

$$
(15)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} = A(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial}{\partial \lambda}\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} = L(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, t),
\end{array}
\right.
$$

qui diffèrent des équations (14) en ce que la fonction $\mathfrak{F}$ ne dépend pas explicitement du temps, tandis que la fonction $\mathcal{G}$ en dépend.

Le problème classique de la Dynamique se trouve ainsi rattaché d'une manière logique, à titre de cas particulier, à la Thermodynamique. Nous avons signalé (1re Partie, Chap. III, nº 4) une méthode qui s'offrait pour opérer ce rapprochement et nous avions marqué en quoi cette méthode laissait place au doute. Nous voyons maintenant que cette méthode conduirait, en général, à des résultats inexacts; en effet, elle conduirait à remplacer, dans les équations (15), le potentiel thermodynamique interne $\mathfrak{F}$ par le produit EU de l'énergie interne et de l'équivalent mécanique de la chaleur; et ces deux fonctions ne sont pas ordinairement égales entre elles.

Il est cependant un cas, particulier en théorie, mais à peu près le seul que l'on traite dans la Dynamique classique, et principalement dans la Mécanique céleste, où les deux méthodes conduisent à des résultats identiques.

Concevons un système formé d'un certain nombre de parties indépendantes 1, 2, ..., n, dont chacune peut se déplacer dans l'espace, mais en gardant un état invariable. Soient Υ_1, Υ_2, ... Υ_n, les énergies internes de ces diverses parties, qui sont des constantes; soient $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ les potentiels thermodynamiques internes de ces parties,

qui sont également des constantes. Nous savons que nous avons d'une part (Ire Partie, Chap. III, n° 2),

$$U = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \ldots + \Upsilon_n + \Psi$$

et, d'autre part (IIIe Partie, Chap. I, n° 2),

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n + E\Psi,$$

$E\Psi$ étant l'une des déterminations du *potentiel des actions mutuelles* des parties 1, 2, ..., n, celle qui s'annule lorsque ces parties sont infiniment éloignées les unes des autres. Les trois quantités $\mathfrak{F}$, EU, $E\Psi$, ne diffèrent donc les unes des autres que par des constantes.

Ainsi, *pour écrire les équations du mouvement d'un système formé de parties indépendantes qui se déplacent sans changer d'état, on peut substituer les unes aux autres, dans les équations de Lagrange, les trois fonctions suivantes :*

Le potentiel thermodynamique interne ;

Le produit de l'énergie interne par l'équivalent mécanique de la chaleur ;

Le potentiel des actions mutuelles des diverses parties du système.

En dehors de ce cas particulier, une pareille substitution entraînerait en général une erreur; cette erreur a été commise fréquemment.

Revenons aux propriétés générales des systèmes dénués de viscosité. Pour un semblable système, les équations (4) deviennent

$$(16)\qquad \begin{cases} R'_\alpha = F(\mathfrak{z})\dfrac{\partial S}{\partial \alpha}, \qquad \ldots, \qquad R'_\lambda = F(\mathfrak{z})\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ \qquad\qquad C' = F(\mathfrak{z})\dfrac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}}. \end{cases}$$

Dans un système dénué de viscosité, les coefficients calorifiques ont la même valeur, que le système soit en équilibre ou en mouvement.

De ces équations (16), on déduit

$$\frac{1}{F(\mathfrak{z})}(R'_\alpha\, d\alpha + \ldots + R'_\lambda\, d\lambda + C'\, d\mathfrak{z}) = dS,$$

ou, en désignant par dQ la quantité de chaleur dégagée dans une modification élémentaire,

$$\frac{dQ}{F(\mathfrak{z})} = -\, dS.$$

En intégrant cette équation pour un cycle fermé, on trouve la proposition suivante :

Lorsqu'un système dénué de viscosité parcourt réellement un cycle fermé, on a, pour ce cycle entier,

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{z})} = 0.$$

Appliquons les équations (16) à un système formé de n parties indépendantes qui se déplacent les unes par rapport aux autres en gardant un état invariable. Désignons par Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n les entropies de ces diverses parties, qui sont des constantes. Nous aurons [Chap. I, égalité (21 *bis*)],

$$S = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_n;$$

l'entropie du système sera aussi une constante ; les équations (16) nous donneront alors la proposition suivante :

Lorsqu'un système est formé de parties indépendantes qui se déplacent sans changer d'état, tous les coefficients calorifiques de ce système sont égaux à 0.

Ce théorème nous fait comprendre pourquoi la méthode indiquée dans la Ire Partie (Chap. III, n° 4) pour relier le problème classique de la Dynamique à la Thermodynamique devient légitime dans ce cas particulier.

Pour terminer ce qui concerne les systèmes dénués de viscosité,

énonçons une CONJECTURE. Il nous semble *probable* que l'on pourra, dans tous les phénomènes physiques, admettre la supposition suivante :

Les résistances passives qui correspondent aux variables $a, b, \ldots, l$, qui ne figurent pas dans l'expression de la force vive, sont toujours égales à o.

On pourrait alors, en toutes circonstances, remplacer les égalités (2) par les égalités

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\mathcal{F}-\mathfrak{T})}{\partial\alpha}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'}=\mathrm{A}'+f_\alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial(\mathcal{F}-\mathfrak{T})}{\partial\lambda}+\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'}=\mathrm{L}'+f_\lambda, \end{array}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}=\mathcal{A}', \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial l}=\mathcal{L}'. \end{array}\right.$$

Ce serait la forme générale des équations de la Thermodynamique pour un système de température uniforme; nous le répétons, nous ne donnons cette hypothèse qu'à titre de conjecture; les développements qui suivent en sont indépendants.

6. *Système formé de parties indépendantes qui ont des températures différentes.* — Nous allons maintenant examiner un cas beaucoup plus général que tous ceux qui précèdent; nous allons étudier un système formé d'un nombre quelconque de parties indépendantes les unes des autres; nous supposerons que la température de chacune de ces parties soit uniforme à chaque instant, tout en étant susceptible de varier d'un instant à l'autre; *nous ne supposerons pas que cette température ait à chaque instant la même valeur pour toutes ces parties.*

Pour ne pas compliquer inutilement les écritures, nous considérerons seulement deux parties indépendantes, que nous désignerons par les indices 1 et 2.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1$ les variables normales qui définissent l'état de la partie 1, y compris sa position absolue dans l'espace ; soient $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \vartheta_2$ les variables normales qui définissent l'état de la partie 2, y compris sa position absolue dans l'espace.

L'énergie interne du système aura une valeur

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} = {} & \Upsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \vartheta_1) + \Upsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, \vartheta_2) \\ & + \mathrm{X}_{12}(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2). \end{aligned}\right.$$

Soit

$$\mathrm{A}''_1\, d\alpha_1 + \mathrm{B}''_1\, d\beta_1 + \ldots + \mathrm{L}''_1\, d\lambda_1 + \mathrm{A}''_2\, d\alpha_2 + \mathrm{B}''_2\, d\beta_2 + \ldots + \mathrm{L}''_2\, d\lambda_2$$

le travail virtuel des actions extérieures qui agissent sur le système.

Chacune des deux parties 1 et 2 peut être regardée comme un système indépendant. Le travail virtuel des actions extérieures à chacun de ces deux systèmes est représenté par les expressions

$$\begin{gathered} \mathrm{A}'_1\, d\alpha_1 + \mathrm{B}'_1\, d\beta_1 + \ldots + \mathrm{L}'_1\, d\lambda_1, \\ \mathrm{A}'_2\, d\alpha_2 + \mathrm{B}'_2\, d\beta_2 + \ldots + \mathrm{L}'_2\, d\lambda_2, \end{gathered}$$

avec

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{A}'_1 = \mathrm{A}''_1 - \mathrm{E}\,\frac{\partial \mathrm{X}_{12}}{\partial \alpha_1}, && \mathrm{A}'_2 = \mathrm{A}''_2 - \mathrm{E}\,\frac{\partial \mathrm{X}_{12}}{\partial \alpha_2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \mathrm{L}'_1 = \mathrm{L}''_1 - \mathrm{E}\,\frac{\partial \mathrm{X}_{12}}{\partial \lambda_1}, && \mathrm{L}'_2 = \mathrm{L}''_2 - \mathrm{E}\,\frac{\partial \mathrm{X}_{12}}{\partial \lambda_2}. \end{aligned}\right.$$

La partie 1 forme un système indépendant, de température uniforme, cette température n'étant pas forcément la même que celle des corps étrangers ; on peut appliquer à ce système les considérations exposées dans les paragraphes précédents ; il admet un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}_1$, et l'on a, à chaque instant,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial(\mathcal{F}_1 - \mathfrak{T}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha'_1} = \mathrm{A}'_1 + f_{\alpha_1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \frac{\partial(\mathcal{F}_1 - \mathfrak{T}_1)}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda'_1} = \mathrm{L}'_1 + f_{\lambda_1}. \end{aligned}\right.$$

On a de même, en désignant par $\mathcal{F}_2$ le potentiel thermodynamique interne du système 2,

$$(21\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\mathcal{F}_2 - \mathfrak{T}_2)}{\partial\alpha_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha'_2} = \mathrm{A}'_2 + f_{\alpha_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial(\mathcal{F}_2 - \mathfrak{T}_2)}{\partial\lambda_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda'_2} = \mathrm{L}'_2 + f_{\lambda_2}. \end{array}\right.$$

Tenons compte des égalités (20); observons que $\mathcal{F}_1$ ne dépend pas de $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$, non plus que $\mathcal{F}_2$ de $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$; que $\mathfrak{T}_1$ ne dépend pas de $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \alpha'_2, \beta'_2, \dots, \lambda'_2$, non plus que $\mathfrak{T}_2$ de $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \alpha'_1, \beta'_1, \dots, \lambda'_1$; posons

$$(22)\qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2,$$

$$(23)\qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathrm{E}\Upsilon_{12},$$

et nous pourrons remplacer les égalités (21) et (21 *bis*) par les égalités

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\mathcal{F} - \mathfrak{T})}{\partial\alpha_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'_1} = \mathrm{A}''_1 + f_{\alpha_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial(\mathcal{F} - \mathfrak{T})}{\partial\lambda_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'_1} = \mathrm{L}''_1 + f_{\lambda_1}, \\ \dfrac{\partial(\mathcal{F} - \mathfrak{T})}{\partial\alpha_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'_2} = \mathrm{A}''_2 + f_{\alpha_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial(\mathcal{F} - \mathfrak{T})}{\partial\lambda_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'_2} = \mathrm{L}''_2 + f_{\lambda_2}. \end{array}\right.$$

Ces égalités (24) sont tout à fait de même forme que les égalités (2) qui régissent le mouvement d'un système de température uniforme: leur nombre est inférieur de deux unités (de n unités, si le système se compose de n parties indépendantes) au nombre des variables dont les valeurs doivent être déterminées en fonctions du temps. On devra donc leur adjoindre deux équations empruntées à des considérations étrangères à la Thermodynamique; telles seraient, par exemple, les

deux équations

$$(25) \qquad \mathfrak{S}_1 = \varphi_1(t), \qquad \mathfrak{S}_2 = \varphi_2(t);$$

qui feraient connaître, à chaque instant, la température de chacune des deux parties indépendantes dont se compose le système.

Calculons la quantité de chaleur dQ dégagée par le système durant une modification élémentaire.

Nous avons (Ire Partie, Chap. III, n° 5)

$$dQ = dQ_1 + dQ_2,$$

dQ_1 et dQ_2 étant les quantités de chaleur dégagées par les parties 1 et 2, durant la même modification.

Soient S_1, S_2 les entropies des parties 1 et 2. Nous aurons [égalité (9)],

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} E\,dQ_1 &= -\,E\,F(\mathfrak{S}_1)\,dS_1 - (f_{\alpha_1}\,d\alpha_1 + f_{\beta_1}\,d\beta_1 + \ldots + f_{\lambda_1}\,d\lambda_1), \\ E\,dQ_2 &= -\,E\,F(\mathfrak{S}_2)\,dS_2 - (f_{\alpha_2}\,d\alpha_2 + f_{\beta_2}\,d\beta_2 + \ldots + f_{\lambda_2}\,d\lambda_2). \end{aligned} \right.$$

Nous déduisons de ces égalités (26)

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dQ_1}{F(\mathfrak{S}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{S}_2)} = &-\,d(S_1 + S_2) \\ &- \frac{f_{\alpha_1}\,d\alpha_1 + f_{\beta_1}\,d\beta_1 + \ldots + f_{\lambda_1}\,d\lambda_1}{E\,F(\mathfrak{S}_1)} \\ &- \frac{f_{\alpha_2}\,d\alpha_2 + f_{\beta_2}\,d\beta_2 + \ldots + f_{\lambda_2}\,d\lambda_2}{E\,F(\mathfrak{S}_2)}. \end{aligned} \right.$$

Intégrons cette égalité (27) pour un cycle fermé, et nous aurons cette généralisation du théorème de Clausius, due à M. H. Poincaré :

Lorsqu'un système formé de n parties indépendantes, dont chacune a une température distincte, mais uniforme, décrit un cycle fermé, on a

$$(28) \qquad \int \left[\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{S}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{S}_2)} + \cdots + \frac{dQ_n}{F(\mathfrak{S}_n)} \right] \geqq 0.$$

Dans le cas particulier où le système est dénué de viscosité, le signe d'inégalité disparait.

On voit ainsi comment plusieurs des propriétés d'un système de température uniforme s'étendent à un système composé de parties indépendantes, portées à des températures différentes les unes des autres.

CHAPITRE III.

LES LIAISONS.

1. *Liaisons bilatérales et liaisons unilatérales.* — Imaginons un système formé de parties séparées, indépendantes les unes des autres. Pour simplifier et préciser les raisonnements, sans d'ailleurs nuire à leur généralité, réduisons le nombre de ces parties à deux et désignons-les par les indices 1 et 2.

Supposons chacune de ces parties de température uniforme et définie par des variables normales; soient $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, a_1, b_1, \ldots, l_1, \mathfrak{S}_1$ les variables normales qui définissent la partie 1 et $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2, a_2, b_2, \ldots, l_2, \mathfrak{S}_2$ les variables normales qui définissent la partie 2.

Imaginons que, par un déplacement continu, on amène ces parties au contact. Tandis que ces parties tendent à se mettre au contact, les variables

$$\alpha_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad a_1, \quad \ldots, \quad l_1, \quad \mathfrak{S}_1,$$
$$\alpha_2, \quad \ldots, \quad \lambda_2, \quad a_2, \quad \ldots, \quad l_2, \quad \mathfrak{S}_2$$

tendent vers des valeurs limites, et nous admettrons que la connaissance de ces valeurs limites suffit à déterminer l'état du système au moment où le contact est établi.

Cela revient à faire l'HYPOTHÈSE suivante : *L'état du système au moment où les parties* 1 *et* 2 *sont contiguës diffère infiniment peu de l'état du système au moment où ces parties sont infiniment près de se toucher*. Ce qui va suivre ne pourrait s'appliquer à un système pour lequel on ne supposerait pas vérifiée cette hypothèse.

En général, une fois le contact établi, les parties 1 et 2 cessent d'être indépendantes.

En premier lieu, il est parfois possible d'imposer au système, une fois le contact établi, des modifications virtuelles dans lesquelles l'état de chacune des parties 1 et 2 éprouve des variations qui seraient inconcevables si ces parties n'étaient pas contiguës.

Si, par exemple, les parties 1 et 2 sont des corps électrisés, la distribution électrique peut varier sur chacune d'elles, mais, tant qu'elles sont séparées, la charge totale de chacune d'elles demeure forcément constante; au contraire, lorsque le contact est établi entre elles, la charge totale de l'une peut diminuer, pourvu que la charge de l'autre augmente d'une quantité égale.

De même, lorsque les parties 1 et 2 sont au contact, il peut se faire qu'elles se mélangent l'une à l'autre, modification inconcevable tant qu'elles sont séparées.

Laissons de côté ces cas où le contact des diverses parties introduit de nouveaux modes de variation dans le système; supposons que, dans toute variation virtuelle du système, chacune des deux parties 1 et 2 éprouve une modification qui serait encore une variation virtuelle de cette partie si elle était isolée; ces deux parties ne seront pas, néanmoins, deux systèmes indépendants.

En effet, une fois le contact établi, les déplacements virtuels de chacune de ces deux parties ne sont plus absolument arbitraires; ces déplacements virtuels peuvent ou bien maintenir le contact des parties, ou bien faire cesser ce contact soit en certains points, soit en totalité, ou bien encore établir de nouveaux contacts; mais, puisque nous excluons l'hypothèse du mélange, ils ne doivent pas tendre à faire pénétrer les deux parties l'une dans l'autre, à amener en un même lieu une portion de l'une et une portion de l'autre.

Cherchons une méthode analytique propre à exclure les déplacements qui amèneraient les deux parties à se pénétrer.

Imaginons que la surface S_1, qui termine la partie 1, et la surface S_2, qui termine la partie 2, soient en contact en un certain point p. Soient p_1 le point matériel de la partie 1 et p_2 le point matériel de la partie 2 qui se trouvent en p. Soient N_1, N_2 les normales en p aux surfaces S_1, S_2, dirigées respectivement vers l'intérieur des parties 1 et 2. Pour qu'un déplacement $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ du point p_1 et un déplacement $(\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2)$ du point p_2 amènent les parties 1 et 2 à se pénétrer au

voisinage de ces points, il faut et il suffit que l'on ait

$$\cos(N_1, x)\,\delta x_1 + \cos(N_1, y)\,\delta y_1 + \cos(N_1, z)\,\delta z_1$$
$$+ \cos(N_2, x)\,\delta x_2 + \cos(N_2, y)\,\delta y_2 + \cos(N_2, z)\,\delta z_2 < 0.$$

On exclura donc les déplacements qui tendraient à faire pénétrer les deux corps l'un dans l'autre en imposant aux déplacements virtuels la condition

$$\cos(N_1, x)\,\delta x_1 + \cos(N_1, y)\,\delta y_1 + \cos(N_1, z)\,\delta z_1$$
$$+ \cos(N_2, x)\,\delta x_2 + \cos(N_2, y)\,\delta y_2 + \cos(N_2, z)\,\delta z_2 \geqq 0.$$

Or δx_1, δy_1, δz_1 s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\lambda_1$; δx_2, δy_2, δz_2 s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\delta\alpha_2, \ldots, \delta\lambda_2$ [Ire Partie, Chap. I, égalités (2)]. La condition précédente peut donc s'écrire

$$M_1\,\delta\alpha_1 + N_1\,\delta\beta_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1$$
$$+ M_2\,\delta\alpha_2 + N_2\,\delta\beta_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0,$$

$M_1, N_1, \ldots, P_1$ étant des fonctions des variables $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1$ et $M_2, N_2, \ldots, P_2$ étant des fonctions des variables $\alpha_2, \beta_2, \ldots, \lambda_2$.

Ainsi, les déplacements virtuels d'un système formé de diverses parties au contact sont soumis à un certain nombre de conditions de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0, \\ M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

que l'on nomme les *conditions de liaisons du système*.

Si l'on voulait conserver seulement les déplacements virtuels qui n'altèrent pas le contact des parties 1 et 2, on devrait remplacer les *conditions* (1) par les *équations*

$$(2)\qquad \begin{cases} M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Lorsqu'on exclut les déplacements virtuels qui feraient cesser un contact, lorsque, par conséquent, on suppose tous les déplacements virtuels soumis aux équations (2), on dit que le système est soumis seulement à des *liaisons bilatérales;* dans ce cas, si

$$\delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_1, \quad \delta\alpha_2, \quad \ldots, \quad \delta\lambda_2$$

est un déplacement virtuel du système,

$$\begin{array}{l}(-\delta\alpha_1), \quad \ldots, \quad (-\delta\lambda_1), \\ (-\delta\alpha_2), \quad \ldots, \quad (-\delta\lambda_2)\end{array}$$

est aussi un déplacement virtuel du système, en sorte que tous les déplacements virtuels du système sont *renversables.*

Lorsque, au contraire, on laisse libres les déplacements qui peuvent faire cesser des contacts, les liaisons du système, exprimées par les conditions (1), sont dites *liaisons unilatérales;* les déplacements virtuels *ne sont plus tous renversables.*

2. *Énergie interne d'un système à liaisons.* — Imaginons un système formé de deux parties 1 et 2, susceptibles d'être séparées ou au contact. Désignons par $\mathcal{U}$ l'énergie interne du système lorsque les deux parties 1 et 2 sont au contact.

Séparons infiniment peu ces deux parties; l'énergie interne du système prendra la valeur

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \Upsilon_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \mathfrak{T}_1) + \Upsilon_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \mathfrak{T}_2) \\ + \Psi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2), \end{array}\right.$$

les variables ayant des valeurs infiniment voisines de celles qui assurent le contact des parties 1 et 2.

Mais la modification que nous venons de considérer change infiniment peu, par hypothèse, l'état du système; par conséquent, l'œuvre accomplie dans cette modification est infiniment petite; par conséquent aussi l'énergie interne du système varie infiniment peu; la quantité $\mathcal{U}$ est égale à la limite vers laquelle tend la quantité (3) lorsque les parties 1 et 2 tendent à s'appliquer l'une contre l'autre. D'où la proposition suivante :

L'énergie interne d'un système formé de plusieurs parties en

contact est égale à la limite vers laquelle tend l'énergie interne du système lorsque ses diverses parties, séparées les unes des autres, tendent à s'appliquer les unes contre les autres.

Prenons un système isolé formé de plusieurs parties, dans un état où ses diverses parties 1 et 2 sont infiniment près d'être au contact; calculons les quantités

$$E\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} = -A_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} = -A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$E\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} = -L_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} = -L_2,$$
$$E\frac{\partial\Psi}{\partial a_1} = -\mathcal{A}_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial a_2} = -\mathcal{A}_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$E\frac{\partial\Psi}{\partial l_1} = -\mathcal{L}_1, \qquad E\frac{\partial\Psi}{\partial l_2} = -\mathcal{L}_2.$$

Calculons les *valeurs limites* vers lesquelles tendent ces quantités lorsque les parties 1 et 2 tendent à s'appliquer l'une contre l'autre; *par définition*, les limites des quantités $A_1, \ldots, L, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{L}_1$ seront les actions que la partie 2, appliquée contre la partie 1, exerce sur cette partie 1; de même, les limites des quantités $A_2, \ldots, L_2$, $\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{L}_2$ seront les actions que la partie 1 exerce sur la partie 2. Les travaux virtuels de ces actions auront pour valeurs respectives

$$A_1\delta\alpha_1 + \ldots + L_1\delta\lambda_1 + \mathcal{A}_1\delta a_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\delta l_1,$$
$$A_2\delta\alpha_2 + \ldots + L_2\delta\lambda_2 + \mathcal{A}_2\delta a_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\delta l_2,$$

$\delta\alpha_1, \ldots, \delta\lambda_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\lambda_2$ étant d'ailleurs soumis aux conditions de liaisons.

Ce que nous venons de dire constitue une définition; en effet, les actions mutuelles de deux systèmes 1 et 2 n'étaient définies jusqu'ici qu'autant que ces systèmes étaient indépendants et ce n'est pas ici le cas.

3. *Entropie et potentiel thermodynamique d'un système à liaisons.* — Imaginons encore un système formé de plusieurs parties, deux par exemple, les parties 1 et 2, et supposons que ces parties soient toutes à la même température ; ce système aura alors une entropie et un potentiel thermodynamique interne, que les parties qui le composent soient ou ne soient pas au contact. En raisonnant comme dans le cas précédent, on prouvera que *l'entropie et le potentiel thermodynamique interne d'un système de température uniforme, formé de plusieurs parties en contact, sont égaux respectivement aux limites vers lesquelles tendent l'entropie et le potentiel thermodynamique du système lorsque les diverses parties, isolées, tendent à s'accoler les unes aux autres.*

Si nous conservons nos notations habituelles, cette entropie s et ce potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ seront les valeurs limites des quantités

$$s = \Sigma_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \vartheta) + \Sigma_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \vartheta),$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \vartheta) + \mathcal{F}_2(\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \vartheta) \\ + \mathrm{E}\Psi(\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2, \vartheta).$$

4. *Équilibre d'un système soumis à des liaisons bilatérales.* — Imaginons un système formé de deux parties 1 et 2, entre lesquelles existent des conditions de liaisons

$$(1) \qquad \begin{cases} M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0, \\ M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supposons que nous soyons assuré d'une manière quelconque que le système ne peut prendre aucun mouvement durant lequel quelqu'une des inégalités

$$M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 > 0,$$
$$M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 > 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

serait satisfaite.

Dès lors, en remplaçant les conditions de liaisons (1) par les équations de liaisons (2), nous sommes assurés de ne rien modifier à l'état d'équilibre ou de mouvement du système; nous pouvons donc considérer le système comme soumis uniquement aux liaisons bilatérales

$$(2)\qquad \begin{cases} M_1\,\delta\alpha_1+\ldots+P_1\,\delta\lambda_1+M_2\,\delta\alpha_2+\ldots+P_2\,\delta\lambda_2=0,\\ M'_1\,\delta\alpha_1+\ldots+P'_1\,\delta\lambda_1+M'_2\,\delta\alpha_2+\ldots+P'_2\,\delta\lambda_2=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supposons que les deux parties 1 et 2 soient à la même température $\mathfrak{I}$. Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système que forment ces deux parties.

Donnons à ce système un déplacement virtuel, isothermique, compatible avec les égalités (2). Les actions extérieures effectuent un travail virtuel $d\mathfrak{T}$; le potentiel thermodynamique interne subit une variation $\delta\mathcal{F}$; d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, les conditions nécessaires et suffisantes que nous cherchons s'obtiendront en écrivant que, pour tout déplacement virtuel isothermique du système, on a

$$(4)\qquad \delta\mathcal{F}=d\mathfrak{T}.$$

Or, on peut écrire

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}=\ &A_1\,\delta\alpha_1+\ldots+L_1\,d\lambda_1+\mathcal{A}_1\,\delta a_1+\ldots+\mathcal{L}_1\,\delta l_1\\ &+A_2\,\delta\alpha_2+\ldots+L_2\,d\lambda_2+\mathcal{A}_2\,\delta a_2+\ldots+\mathcal{L}_2\,\delta l_2,\\ \delta\mathcal{F}=\ &\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1+\ldots+\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1+\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial a_1}\,\delta a_1+\ldots+\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial l_1}\,\delta l_1\\ &+\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2+\ldots+\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2+\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial a_2}\,\delta a_2+\ldots+\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial l_2}\,\delta l_2\\ &+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1+\ldots+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\,\delta a_1+\ldots+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\,\delta l_2\\ &+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2+\ldots+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_2}\,\delta a_2+\ldots+E\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\,\delta l_2. \end{aligned}$$

L'égalité (4) peut donc s'écrire

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\mathrm{A}_1 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(\mathrm{L}_1 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}\right)\delta\lambda_1\\ &+\left(\mathcal{A}_1 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial a_1} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial a_1}\right)\delta a_1 + \ldots + \left(\mathcal{L}_1 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial l_1} - \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial l_1}\right)\delta l_1\\ &+\left(\mathrm{A}_2 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(\mathrm{L}_2 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} - \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}\right)\delta\lambda_2\\ &+\left(\mathcal{A}_2 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial a_2} - \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial a_2}\right)\delta a_2 + \ldots + \left(\mathcal{L}_2 - \mathrm{E}\frac{\partial\Psi}{\partial l_2} - \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial l_2}\right)\delta l_2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Mais cette égalité doit avoir lieu non pas quelles que soient les variations

$$\delta\alpha_1,\quad \ldots,\quad \delta\lambda_1,\quad \delta a_1,\quad \ldots,\quad \delta l_1,\quad \delta\alpha_2,\quad \ldots,\quad \delta\lambda_2,\quad \delta a_2,\quad \ldots,\quad \delta l_2,$$

mais seulement lorsque les égalités (2) sont satisfaites.

Il faut et il suffit pour cela qu'il existe des facteurs Π, Π', ..., en nombre égal à celui des équations (2), *ces facteurs dépendant uniquement des variables* $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2$, tels que l'égalité (5) ait lieu quels que soient

$$\begin{gathered}\delta\alpha_1,\quad \ldots,\quad \delta\lambda_1,\quad \delta a_1,\quad \ldots,\quad \delta l_1,\\ \delta\alpha_2,\quad \ldots,\quad \delta\lambda_2,\quad \delta a_1,\quad \ldots,\quad \delta l_2,\end{gathered}$$

lorsqu'on ajoute à son premier membre l'expression

$$\begin{aligned}&\Pi(\mathrm{M}_1\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}_1\delta\lambda_1 + \mathrm{M}_2\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}_2\delta\lambda_2)\\ &+\Pi'(\mathrm{M}'_1\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}'_1\delta\lambda_1 + \mathrm{M}'_2\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}'_2\delta\lambda_2)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

En d'autres termes, pour que le système soumis aux liaisons bilaté-

rales (2) soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} + \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}, \end{array}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_1} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{L}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_1} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial l_1}, \end{array}\right.$$

$$(6\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} A_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2} + \Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2} + \Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \ldots = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}, \end{array}\right.$$

$$(7\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_2} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial a_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{L}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_2} = \dfrac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial l_2}. \end{array}\right.$$

Examinons les conséquences de ces égalités (6), (7), (6 *bis*), (7 *bis*).

D'après la définition des actions exercées par la partie 2 sur la partie 1, nous pouvons dire que

$$A_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1},\quad \ldots,\quad L_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1},\quad \mathcal{A}_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial a_1},\quad \ldots,\quad \mathcal{L}_1 - E\frac{\partial\Psi}{\partial l_1}$$

sont les actions exercées sur la partie 1 par les corps étrangers à cette partie. Nous voyons alors que les égalités (6) et (7) conduisent à l'important théorème que voici :

Les conditions d'équilibre d'un système qui, au lieu d'être indépendant, présente des liaisons bilatérales avec les corps qui l'environnent s'écrivent comme les conditions d'équilibre d'un système

indépendant, pourvu qu'aux forces extérieures auxquelles ce système est soumis on adjoigne des forces fictives

$$(8)\quad \begin{cases} F_{\alpha_1} = \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F'_{\lambda_1} = \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots. \end{cases}$$

Ces forces fictives, nommées FORCES DE LIAISONS, *ne dépendent que des variables qui fixent la position relative du système et des corps extérieurs, et non des variables qui changeraient l'état du système ou des corps extérieurs sans faire varier leur position relative.*

Le travail virtuel des forces extérieures de liaisons appliquées au système (1) a pour valeur

$$\begin{aligned} F_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + F_{\lambda_1}\delta\lambda_1 = \quad & (\Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots)\delta\alpha_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots)\delta\lambda_1. \end{aligned}$$

Le système 1 exerce de même sur les corps extérieurs des forces de liaison

$$(8\ bis)\quad \begin{cases} F_{\alpha_2} = \Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{\lambda_2} = \Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \ldots, \end{cases}$$

dont le travail virtuel a pour valeur

$$\begin{aligned} F_{\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + F_{\lambda_2}\delta\lambda_2 = \quad & (\Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots)\delta\alpha_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \ldots)\delta\lambda_2. \end{aligned}$$

Le travail virtuel total des forces de liaisons qui s'exercent entre les deux systèmes 1 et 2 a pour valeur

$$\begin{aligned} & F_{\alpha_1}\delta\alpha_1 + \ldots + F_{\lambda_1}\delta\lambda_1 + F_{\alpha_2}\delta\alpha_2 + \ldots + F_{\lambda_2}\delta\lambda_2 \\ & \quad = \quad \Pi(M_1\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\delta\lambda_1 + M_2\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\delta\lambda_2) \\ & \qquad + \Pi'(M'_1\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\delta\lambda_1 + M'_2\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\delta\lambda_2) \\ & \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'on tient compte des égalités (2), on peut énoncer le théorème suivant :

Le travail virtuel de toutes les forces de liaisons qui s'exercent entre les deux systèmes (1) *et* (2) *est nul pour tout déplacement virtuel qui respecte les liaisons bilatérales existant entre les deux systèmes.*

Les conditions d'équilibre d'un système qui est assujetti aux corps étrangers par des liaisons bilatérales diffèrent en un point essentiel des conditions d'équilibre d'un système indépendant.

Supposons que l'on donne à un système indépendant une modification virtuelle $\delta\alpha, \ldots, \delta\lambda, \delta a, \ldots, \delta l$, l'état des corps étrangers demeurant invariable ; le travail virtuel des actions extérieures sera, dans ce cas, la différentielle totale d'une fonction des variables $\alpha, \ldots, \lambda, a, \ldots, l$ (*voir* Chap. I, n° 4). Considérons au contraire un système assujetti à des liaisons bilatérales avec les corps extérieurs ; le travail virtuel des actions extérieures et des forces de liaison, qui doit, dans ce cas, remplacer le travail des seules actions extérieures, ne sera plus, en général, une différentielle totale. Comme nous avons eu soin de ne jamais supposer, dans nos démonstrations, que le travail virtuel des actions extérieures fût une différentielle totale, les résultats de ces démonstrations s'appliquent aux systèmes qui présentent, avec les corps extérieurs, des liaisons bilatérales.

5. *Équilibre d'un système soumis à des liaisons unilatérales.* — Pourquoi, en traitant, au numéro précédent, de l'équilibre d'un système soumis à des liaisons, avons-nous dû ajouter cette restriction que ces liaisons étaient bilatérales? La raison en est simple. Nous avons fait usage des lois de l'équilibre des systèmes telles qu'elles ont été établies au Chapitre I. Or, tout, dans l'établissement de ces lois, suppose que le système soit défini, au voisinage de l'état étudié, par un système unique de paramètres, variables arbitrairement d'une manière continue. Cette condition n'est pas réalisée dans un système soumis à des liaisons unilatérales. Prenons un système formé de diverses parties qui, dans l'état étudié, sont au contact ; deux systèmes différents de

variables devront être employés pour définir les états du système voisins de celui-là, selon qu'en ces états le contact sera conservé ou supprimé. On voit donc bien que nos raisonnements tomberaient si le système présentait des liaisons unilatérales.

Les raisonnements précédents supposent que l'on soit assuré de la proposition suivante : Le système ne peut, à partir de l'état considéré, et les vitesses des diverses parties étant toutes égales à o, prendre un mouvement dont le premier élément représenterait un déplacement virtuel non renversable; nous aurons donc les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système si, aux conditions établies dans le numéro précédent, nous joignons des conditions nécessaires et suffisantes pour que tout mouvement de ce type soit exclu.

Malheureusement, nous ne pouvons établir avec une entière rigueur ces conditions nécessaires et suffisantes; nous ne pouvons indiquer d'une manière assurée qu'une condition qui est *suffisante* pour rendre impossible tout mouvement du système débutant, sans vitesse initiale, par un déplacement non renversable.

Cette condition est la suivante :

Si, pour toute modification virtuelle non renversable, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} - \mathrm{A}_1\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1} - \mathrm{L}_1\right)\delta\lambda_1 \\
&+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_1} - \mathcal{A}_1\right)\delta a_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_1} - \mathcal{L}_1\right)\delta l_1 \\
&+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_2} - \mathrm{A}_2\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_2} - \mathrm{L}_3\right)\delta\lambda_2 \\
&+ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_2} - \mathcal{A}_2\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_2} - \mathcal{L}_2\right)\delta l_2 > 0,
\end{aligned}$$

on est assuré que le système ne peut prendre, sans vitesse initiale, aucun mouvement commençant par un déplacement virtuel non renversable.

Imaginons, en effet, que le système puisse prendre un semblable mouvement. Soit t_0 l'instant initial de ce mouvement. Soient $d\alpha_1$, ..., $d\lambda_1$, da_1, ..., dl_1, $d\alpha_2$, ..., $d\lambda_2$, da_2, ..., dl_2 le premier élément de

ce mouvement. Supposons que l'on ait

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2 > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité varie d'une manière continue durant le mouvement du système; nous pourrions donc déterminer un instant t_1, postérieur à t_0 et assez voisin de t_0, pour que, entre les instants t_0 et t_1, ce premier membre demeure constamment positif; nous aurions certainement alors

$$\int_{t_1}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2\right] > 0.$$

Mais, le système ayant rompu à l'instant t_0 certaines liaisons unilatérales, on peut toujours supposer l'instant t_1 assez voisin de l'instant t_0 pour que, entre ces deux instants, le système soit soumis exclusivement à des liaisons bilatérales. Pendant ce temps, son état sera défini par un système unique de paramètres, variables arbitrairement d'une manière continue; sa température étant uniforme on pourra lui appliquer les lois du mouvement d'un système de température uniforme, telles qu'elles ont été établies au Chapitre II; ces lois nous donneront immédiatement l'égalité

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2\right]$$
$$= \mathfrak{T}_0 - \mathfrak{T}_1 + \int_{t_0}^{t_1} (f_{\alpha_1} d\alpha_1 + \ldots + f_{l_2} dl_2).$$

Les vitesses initiales étant toutes égales à 0 par hypothèse, il en est de même de $\mathfrak{T}_0$, et l'égalité précédente nous donne l'inégalité

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2\right] < 0,$$

qui est en contradiction avec la précédente.

Cette contradiction démontre l'exactitude de la proposition énoncée.

La condition précédente, suffisante pour entraver tout mouvement qui débuterait par un déplacement non renversable, est-elle en même temps nécessaire à cet objet? Fourier, Gauss, Cauchy et, depuis,

beaucoup d'autres géomètres l'ont pensé; mais il nous semble difficile de le démontrer rigoureusement en s'appuyant uniquement sur ce qui précède.

6. *Mouvement d'un système, de température uniforme, soumis à des liaisons bilatérales.* — Pour ne pas allonger outre mesure le présent travail, nous n'étudierons le mouvement d'un système qu'autant que les liaisons entre ses diverses parties demeurent bilatérales.

Considérons un système formé de deux parties 1 et 2, entre lesquelles existent des liaisons bilatérales; supposons les deux parties 1 et 2 à la même température $\mathfrak{T}$. L'ensemble de ces deux parties formera alors un système auquel on pourra appliquer les lois générales du mouvement exposées au Chapitre II.

Nous pouvons, sans avoir besoin de connaître explicitement les variables indépendantes qui définissent ce système, énoncer les lois du mouvement de la manière suivante :

Soient

$d\mathfrak{C}$ le travail virtuel des actions extérieures;
$\delta\mathcal{F}$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne;
$d\tau$ le travail virtuel des forces d'inertie;
$d\varrho$ le travail virtuel des résistances passives.

Pour tout déplacement virtuel du système, nous devons avoir

$$d\mathfrak{C} + d\varrho - \delta\mathcal{F} = d\tau. \tag{9}$$

Or, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} d\mathfrak{C} = \; & \mathrm{A}_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{L}_1\,\delta\lambda_1 + \mathcal{A}_1\,\delta a_1 + \ldots + \mathcal{L}_1\,\delta l_1 \\ & + \mathrm{A}_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{L}_2\,\delta\lambda_2 + \mathcal{A}_2\,\delta a_2 + \ldots + \mathcal{L}_2\,\delta l_2, \\ \delta\mathcal{F} = \; & \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1 + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial a_1}\,\delta a_1 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial l_1}\,\delta l_1 \\ & + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2 + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial a_2}\,\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial l_2}\,\delta l_2 \\ & + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1}\,\delta\lambda_1 + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_1}\,\delta a_1 + \ldots + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_1}\,\delta l_1 \\ & + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_2}\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_2}\,\delta\lambda_2 + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial a_2}\,\delta a_2 + \ldots + \mathrm{E}\,\frac{\partial\Psi}{\partial l_2}\,\delta l_2, \end{aligned}$$

$$d\varphi = \quad f_{\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + f_{\lambda_1}\,\delta\lambda_1 + f_{a_1}\,\delta a_1 + \ldots + f_{l_1}\,\delta l_1$$
$$+ f_{\alpha_2}\,\delta\alpha_2 + \ldots + f_{\lambda_2}\,\delta\lambda_2 + f_{a_2}\,\delta a_2 + \ldots + f_{l_2}\,\delta l_2,$$

$$d\tau = \quad \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha'_1}\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda'_1}\right)\delta\lambda_1$$
$$+ \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\alpha'_2}\right)\delta\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda'_2}\right)\delta\lambda_2.$$

L'égalité (9) peut donc s'écrire

$$(9\,bis)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathfrak{L}_2\,\delta l_2 - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_2}{\partial l_2}\,\delta l_2 \\ - \mathrm{E}\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_1}\,\delta\alpha_1 - \ldots - \mathrm{E}\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_2}\,\delta l_2 + f_{\alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \ldots + f_{l_2}\,\delta l_2 \\ = \left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha'_1}\right)\delta\alpha_1 + \ldots + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial\lambda'_2}\right)\delta\lambda_2. \end{cases}$$

Mais, dans cette égalité (9 *bis*), les quantités $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\lambda_2$ n'ont pas des valeurs arbitraires; elles sont soumises aux équations de liaison

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{M}_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ \mathrm{M}'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + \mathrm{P}'_1\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + \mathrm{P}'_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dès lors, il existe des facteurs Π, Π', ..., tels qu'en multipliant par Π le premier membre de la première équation (2), par Π' le premier membre de la seconde, etc., et en ajoutant les résultats obtenus au premier membre de l'équation (9 *bis*), celle-ci ait lieu quelles que soient les quantités $\delta\alpha_1, \ldots, \delta l_2$.

Les facteurs Π, Π', ... dépendent uniquement des variables $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_2$ et de leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps et point des variables $a_1, \ldots, l_1, a_2, \ldots, l_2$, ni des dérivées de ces variables par rapport au temps.

On doit donc avoir, à chaque instant du mouvement,

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_1 - \mathrm{E}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1} + \Pi\mathrm{M}_1 + \Pi'\mathrm{M}'_1 + \ldots \\ \qquad + f_{\alpha_1} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha'_1} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\alpha_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{L}_1 - \mathrm{E}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\lambda_1} + \Pi\mathrm{P}_1 + \Pi'\mathrm{P}'_1 + \ldots \\ \qquad + f_{\lambda_1} - \dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda_1} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\lambda'_1} - \dfrac{\partial\mathfrak{F}_1}{\partial\lambda_1} = 0; \end{cases}$$

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_1} + f_{a_1} - \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial a_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathcal{L}_1 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_1} + f_{l_1} - \dfrac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial l_1} = 0; \end{array}\right.$$

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} A_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial \alpha_2} + HM_2 + H'M'_2 + \dots \\ \qquad + f_{\alpha_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \alpha_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}'_2}{\partial \alpha'_2} - \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ L_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial \lambda_2} + HP_2 + H'P'_2 + \dots \\ \qquad + f_{\lambda_2} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \lambda_2} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}'_2}{\partial \lambda'_2} - \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2} = 0; \end{array}\right.$$

$$(11\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial a_2} + f_{a_2} - \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial a_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathcal{L}_2 - E\dfrac{\partial\Psi}{\partial l_2} + f_{l_2} - \dfrac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial l_2} = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on joint à ces équations une dernière équation indiquant de quelle manière la température $\mathfrak{S}$ du système varie avec le temps, on aura toutes les équations du mouvement du système.

Les équations (10) et (10 *bis*) conduisent à la conséquence suivante :

On peut étendre à un système qui présente, avec les corps extérieurs, des liaisons bilatérales, toutes les lois du mouvement d'un système indépendant des corps extérieurs, pourvu que l'on ajoute aux forces extérieures des forces fictives

$$F_{\alpha_1} = HM_1 + H'M'_1 + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F_{\lambda_1} = HP_1 + H'P'_1 + \dots.$$

Ces forces de liaison dépendent uniquement des variables $\alpha_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2$, *qui fixent la position du système et des corps extérieurs, et des dérivées premières et secondes, par rapport au temps, de ces variables.*

Cette proposition, toutefois, n'est démontrée qu'autant que l'ensemble formé par le système et les corps extérieurs a, à chaque instant, une température uniforme.

Considérons une modification infiniment petite quelconque du système dont les deux parties 1 et 2, à la même température, ont entre elles des liaisons bilatérales; le travail total des forces de liaisons qui s'exercent entre ces deux parties aura pour valeur

$$\left[(\Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots)\frac{d\alpha_1}{dt} + \ldots + (\Pi P_1 + \Pi' P'_1)\frac{d\lambda_1}{dt}\right.$$
$$\left. + (\Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots)\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots + (\Pi P_2 + \Pi' P'_2)\frac{d\lambda_2}{dt}\right] dt.$$

Mais les équations de liaison (2) doivent être vérifiées si l'on pose

$$\frac{d\alpha_1}{dt}dt = \delta\alpha_1, \qquad \frac{d\alpha_2}{dt}dt = \delta\alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d\lambda_1}{dt}dt = \delta\lambda_1, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt}dt = \delta\lambda_2.$$

Le travail précédent est donc égal à 0.

7. *Mouvement d'un système dont les diverses parties, portées à des températures différentes, sont assujetties à des liaisons bilatérales.* — Tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur les liaisons a été déduit de ce qui a été établi dans les deux Chapitres précédents, sans que nous ayons eu besoin d'invoquer aucune hypothèse nouvelle. Il n'en sera pas de même de ce qui va être exposé au présent numéro.

Nous avons traité, au Chapitre II, n° **6**, le mouvement d'un système formé de diverses parties indépendantes portées à des températures différentes. Les équations que nous avons obtenues peuvent être condensées dans la proposition suivante :

Supposons que le système soit formé de deux parties 1 et 2. Soit

$$\mathcal{U} = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Psi$$

l'énergie interne de ce système, et posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi,$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant les potentiels thermodynamiques internes des parties 1 et 2, supposées isolées. Si nous donnons au système un déplacement virtuel quelconque, nous aurons

$$(12) \qquad d\mathfrak{E} + d\varphi - \delta\mathcal{F} = d\tau,$$

les divers symboles ayant le même sens qu'en l'égalité (9).

Cela posé, voici l'hypothèse que nous admettrons :

Hypothèse. — *Le résultat précédent demeure exact même dans le cas où les diverses parties qui constituent le système sont portées à des températures différentes et présentent entre elles des liaisons bilatérales.*

Cette hypothèse admise, il suffit de reprendre les considérations exposées au numéro précédent, pour être en droit d'étendre tous les résultats obtenus dans ce numéro à un système dont la température n'est pas uniforme.

8. *Coefficients calorifiques d'un système soumis à des liaisons bilatérales.* — Nous ne connaissons jusqu'ici le sens du mot *quantité de chaleur dégagée par un système* qu'autant que ce système est indépendant des corps étrangers. S'il s'agit d'un système présentant avec les corps étrangers des liaisons bilatérales, nous ne pourrons pas employer ce mot avant d'en avoir donné une définition.

Considérons donc un système soumis à des liaisons bilatérales avec les corps extérieurs; soit U l'énergie interne de ce système; soient $F_\alpha, \ldots, F_\lambda$ les forces de liaisons.

Posons

$$(13) \quad \begin{cases} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'} - (A + F_\alpha) = ER_\alpha, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'} - (A + F_\lambda) = ER_\lambda, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial a} - \mathcal{A} = E\mathcal{R}_a, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial l} - \mathcal{L} = E\mathcal{R}_l. \end{cases}$$

La somme

$$-(R_\alpha\,\delta\alpha + \ldots + R_\lambda\,\delta\lambda + \mathcal{R}_a\,\delta a + \ldots + \mathcal{R}_l\,\delta l)$$

sera, par définition, la *quantité de chaleur dégagée* par le système durant la modification réelle ou virtuelle $\delta\alpha, \ldots, \delta\lambda, \delta a, \ldots, \delta l$.

Il résulte évidemment de cette définition, qui renferme comme cas particulier celle que nous avons donnée pour un système indépendant (Ire Partie, Chap. III, n° 5), qu'*une modification réelle ou virtuelle d'un système isolé entraîne un dégagement de chaleur égal à* o.

Considérons un système formé de deux parties 1 et 2. Soient $\alpha_1, \ldots, \lambda_1, a_1, \ldots, l_1$ les variables qui définissent la première partie; $\alpha_2, \ldots, \lambda_2, a_2, \ldots, l_2$ les variables qui définissent la seconde partie.

Ces deux parties présentent entre elles des contacts qu'expriment les équations de liaisons

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En outre, elles présentent avec les corps extérieurs des contacts qu'expriment les équations de liaisons

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + p_1\,\delta\lambda_1 + \mu_1\,\delta\mathrm{a} + \ldots + \varpi_1\,\delta\mathrm{l}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + p_2\,\delta\lambda_2 + \mu_2\,\delta\mathrm{a} + \ldots + \varpi_2\,\delta\mathrm{l}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

a, ..., l étant les variables qui définissent la position des corps extérieurs.

L'énergie interne du système formé par l'ensemble des deux parties sera désignée par

$$\upsilon = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Psi.$$

Les actions extérieures appliquées au système formé des deux parties

seront désignées par $A_1, \ldots, L_1, A_2, \ldots, L_2, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{L}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{L}_2$.

Dans une modification quelconque du système, la partie 1 dégagera une quantité de chaleur dQ_1 donnée par l'égalité

$$\begin{aligned}
-E\,dQ_1 = &\left[E\frac{\partial \Upsilon_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \alpha'_1}\right.\\
&\left.\quad - \left(A_1 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} + \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \ldots + \mathfrak{P}_1 m_1 + \ldots\right)\right]\delta\alpha_1\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \left[E\frac{\partial \Upsilon}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial \lambda'_1}\right.\\
&\left.\quad - \left(L_1 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} + \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \ldots + \mathfrak{P}_1 p_1 + \ldots\right)\right]\delta\lambda_1\\
&+ \left(E\frac{\partial \Upsilon_1}{\partial a_1} + E\frac{\partial \Psi}{\partial a_1} - \mathcal{A}_1\right)\delta a_1 + \ldots + \left(E\frac{\partial \Upsilon_1}{\partial l_1} + E\frac{\partial \Psi}{\partial l_1} - \mathcal{L}_1\right)\delta l_1.
\end{aligned}$$

De même, la partie 2 dégagera une quantité de chaleur dQ_2 donnée par l'égalité

$$\begin{aligned}
-E\,dQ_2 = &\left[E\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \alpha'_2}\right.\\
&\left.\quad - \left(A_2 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} + \Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \ldots + \mathfrak{P}_2 m_2 + \ldots\right)\right]\delta\alpha_2\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \left[E\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial \lambda'_2}\right.\\
&\left.\quad - \left(L_2 - E\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} + \Pi P_2 + \Pi' P'_2 + \ldots + \mathfrak{P}_2 p_2 + \ldots\right)\right]\delta\lambda_2\\
&+ \left(E\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial a_2} + E\frac{\partial \Psi}{\partial a_2} - \mathcal{A}_2\right)\delta a_2 + \ldots + \left(E\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial l_2} + E\frac{\partial \Psi}{\partial l_2} - \mathcal{L}_2\right)\delta l_2.
\end{aligned}$$

On a, en vertu des égalités (14),

$$\begin{aligned}
&\Pi(M_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P_1\,\delta\lambda_1 + M_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P_2\,\delta\lambda_2) = 0,\\
&\Pi'(M'_1\,\delta\alpha_1 + \ldots + P'_1\,\delta\lambda_1 + M'_2\,\delta\alpha_2 + \ldots + P'_2\,\delta\lambda_2) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les deux égalités précédentes donnent alors sans peine

$$\begin{aligned} -\mathrm{E}(dQ_1 + dQ_2) = & \left[\mathrm{E}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha'_1} - \left(\mathrm{A}_1 + \mathfrak{L}_1 m_1 + \ldots\right)\right]\delta\alpha_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left[\mathrm{E}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda_2} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \lambda'_2} - (\mathrm{L}_2 + \mathfrak{L}_2 p_2 + \ldots)\right]\delta\lambda_2 \\ & + \left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a_1} - \mathcal{A}_1\right)\delta a_1 + \ldots + \left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial l_2} - \mathcal{L}_2\right)\delta l_2. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par dQ la quantité de chaleur dégagée dans la modification considérée par le système que composent les deux parties 1 et 2, le second membre de l'égalité précédente représente la quantité $-\mathrm{E}\,dQ$; on a donc

$$dQ = dQ_1 + dQ_2.$$

Si donc un système, qui peut présenter des liaisons bilatérales avec les corps avoisinants, est formé de parties qui peuvent présenter entre elles des liaisons bilatérales, la quantité de chaleur que le système dégage dans une modification quelconque est la somme algébrique des quantités de chaleur que dégagent, dans la même modification, ses diverses parties.

Si l'on rapproche cette proposition de la précédente, on obtient celle-ci :

Lorsqu'un système isolé est formé de deux parties ayant entre elles des liaisons bilatérales, la quantité de chaleur dégagée par l'une de ses parties, dans une modification réelle ou virtuelle du système, est égale à la quantité de chaleur absorbée par l'autre.

Nous avons étudié (Ire Partie, Chap. III, n° 5) les procédés calorimétriques; nous avons considéré trois systèmes S_1, S_2, S_3, que nous avons supposés indépendants; les propositions qui précèdent permettent d'étendre la théorie de la calorimétrie au cas où les systèmes S_1, S_2, S_3 présentent entre eux des liaisons bilatérales; c'est ce cas qui est, en général, réalisé dans la pratique.

Des égalités (13), on déduit aisément la conséquence suivante :

Soient, dans une modification réelle ou virtuelle d'un système qui

présente, avec les corps extérieurs, des liaisons bilatérales, $d\varpi$ le travail des actions extérieures et des forces extérieures de liaisons; $d\tau$ le travail des forces d'inertie; nous aurons

$$\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + d\tau = d\varpi + \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}.$$

Dans le cas d'une modification réelle, cette égalité devient

$$\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + \delta\mathfrak{T} = d\varpi + \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}.$$

Ces égalités expriment le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail pour un système soumis à des liaisons bilatérales de la part des corps qui l'environnent.

Tout ce que nous venons de dire demeure vrai lors même que la température du système n'est pas uniforme. Supposons maintenant que cette température soit uniforme. Les égalités

$$(13\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\alpha} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'} - (\mathrm{A} + \mathrm{F}_\alpha) = \mathrm{E}\mathrm{R}_\alpha,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'} - (\mathrm{L} + \mathrm{F}_\lambda) = \mathrm{E}\mathrm{R}_\lambda,\\ &\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial a} - \mathcal{A} = \mathrm{E}\mathcal{R}_a, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial l} - \mathcal{L} = \mathrm{E}\mathcal{R}_l,\\ &\qquad\qquad \mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\vartheta} = \mathrm{E}\mathrm{C},\end{aligned}\right.$$

qui définissent les coefficients calorifiques du système, jointes aux équations du mouvement

$$(10\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha'} - (\mathrm{A} + \mathrm{F}_\alpha + f_\alpha) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda'} - (\mathrm{L} + \mathrm{F}_\lambda + f_\lambda) = 0,\\ &\mathrm{E}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial a} - (\mathcal{A} + f_a) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{E}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial l} - (\mathcal{L} + f_l) = 0,\end{aligned}\right.$$

et aux identités

$$\mathfrak{F} = \mathrm{E}[\mathrm{U} - \mathrm{F}(\vartheta)\mathrm{S}],$$

$$\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\vartheta} = \mathrm{F}(\vartheta)\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\vartheta}$$

donnent

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}\mathrm{R}_\alpha = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha} + f_\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\mathrm{E}\mathrm{R}_\lambda = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda} + f_\lambda, \\ &\mathrm{E}\mathcal{A}_a = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial a} + f_a, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\mathrm{E}\mathcal{A}_l = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{I})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial l} + f_l, \\ &\mathrm{E}\mathrm{C} = \mathrm{E}\mathrm{F}(\mathfrak{I})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathfrak{I}}, \end{aligned}\right.$$

égalités semblables à celles que l'on obtient pour un système indépendant.

On déduit de là, pour une modification réelle quelconque,

$$(17)\quad \frac{\mathrm{E}\,d\mathrm{Q}}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})} = -\,\mathrm{E}\,d\mathrm{S} - \frac{f_\alpha\,d\alpha + \ldots + f_l\,dl}{\mathrm{F}(\mathfrak{I})}.$$

Imaginons un système formé de n parties $1, 2, \ldots, n$, indépendantes ou offrant entre elles des liaisons bilatérales; chacune de ces parties a une température uniforme, mais cette température n'est pas forcément la même pour toutes ces parties; le système lui-même peut présenter avec les corps avoisinants des liaisons bilatérales.

Pour chacune de ces parties, écrivons une égalité analogue à l'égalité (17) et ajoutons membre à membre ces diverses égalités. Si nous posons

$$(18)\quad s = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \ldots + \mathrm{S}_n,$$

nous trouverons

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\frac{d\mathrm{Q}_1}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_1)} + \frac{d\mathrm{Q}_2}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_2)} + \ldots + \frac{d\mathrm{Q}_n}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_n)}\right] &= -\,\mathrm{E}\,ds \\ &- \frac{f_{\alpha_1}d\alpha_1 + \ldots + f_{l_1}dl_1}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_1)} - \frac{f_{\alpha_2}d\alpha_2 + \ldots + f_{l_2}dl_2}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_2)} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{f_{\alpha_n}d\alpha_n + \ldots + f_{l_n}dl_n}{\mathrm{F}(\mathfrak{I}_n)}. \end{aligned}$$

Intégrons cette égalité pour un cycle fermé, en observant que l'on a

$$\int dS = 0,$$

$$f_{\alpha_1}\, d\alpha_1 + \ldots + f_{l_1}\, dl_1 \leqq 0,$$

$$f_{\alpha_2}\, d\alpha_2 + \ldots + f_{l_2}\, dl_2 \leqq 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{\alpha_n}\, d\alpha_n + \ldots + f_{l_n}\, dl_n \leqq 0,$$

et nous trouverons l'inégalité

$$(19) \qquad \int \left[\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{S}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{S}_2)} + \ldots + \frac{dQ_n}{F(\mathfrak{S}_n)} \right] \leqq 0.$$

Cette inégalité est ainsi étendue aux systèmes que forment des parties portées à des températures différentes et présentant entre elles des liaisons bilatérales.

CHAPITRE IV.

STABILITÉ ET DÉPLACEMENT DE L'ÉQUILIBRE.

1. *Du potentiel thermodynamique total.* — Le travail virtuel des actions extérieures à un système (en y comprenant, au besoin, les forces de liaisons extérieures)

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathcal{A}\,\delta a + \mathcal{B}\,\delta b + \ldots + \mathcal{L}\,\delta l$$

n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$. Cependant, s'il n'en est pas ainsi en général, il en est ainsi dans un grand nombre de cas particuliers importants.

Lorsqu'il existe une fonction uniforme Ω telle que l'on ait

$$(1) \quad A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \ldots + \mathcal{L}\,dl = -\,d\Omega,$$

on dit que *les actions extérieures au système admettent un potentiel*

et que Ω est ce potentiel. Ce potentiel, lorsqu'il existe, est évidemment déterminé à une constante près.

Lorsque les actions extérieures admettent un potentiel, nous donnons le nom de *potentiel thermodynamique total* du système à la somme

$$\Phi = \mathcal{F} + \Omega \tag{2}$$

du potentiel thermodynamique interne et du potentiel des actions extérieures.

Voici un cas important où un système admet un potentiel thermodynamique total :

Imaginons les variations réelles ou virtuelles des corps extérieurs tellement liées aux variations réelles ou virtuelles du système que les actions extérieures A, B, ..., L, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{L}$ gardent des valeurs invariables. On pourra alors écrire

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta + \ldots + \mathrm{L}\,d\lambda + \mathcal{A}\,a + \mathcal{B}\,b + \ldots + \mathcal{L}\,l \\ &\quad = d(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \ldots + \mathrm{L}\lambda + \mathcal{A}\,a + \mathcal{B}\,b + \ldots + \mathcal{L}\,l) \end{aligned}$$

et le système admettra pour potentiel thermodynamique total la quantité

$$\Phi = \mathcal{F} - (\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \ldots + \mathrm{L}\lambda + \mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \ldots + \mathcal{L}\,dl). \tag{3}$$

Nous donnerons à cette quantité, que l'on a souvent à considérer dans les applications, le nom de *potentiel thermodynamique sous actions constantes.*

2. *Stabilité de l'équilibre à température constante.* — Il nous est désormais inutile de distinguer les variables $a, b, \ldots, l$ des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Considérons donc un système dont la température soit uniforme et qui soit défini par les variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \vartheta$. Pour tout mouvement réel de ce système, nous aurons [Chap. II, équation (11)],

$$\begin{aligned} &d\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}\,d\vartheta - (\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta + \ldots + \mathrm{L}\,d\lambda) \\ &\quad = -\,d\mathfrak{T} + (f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda). \end{aligned}$$

Si les actions extérieures admettent un potentiel Ω, cette égalité, jointe aux égalités (1) et (2), deviendra

$$d\Phi - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{z}} d\mathfrak{z} = - d\mathfrak{T} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda.$$

Si la modification est isothermique, cette égalité deviendra

$$(4) \qquad d\Phi = - d\mathfrak{T} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda.$$

Intégrée entre un état initial 0 et un état final 1 du système, elle deviendra

$$(4\ bis) \quad \Phi_0 - \Phi_1 = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_0 - \int_0^1 (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda).$$

Il suffit alors d'observer que la quantité

$$\int_0^1 (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \ldots + f_\lambda d\lambda)$$

ne peut jamais être positive, et de répéter presque textuellement la démonstration, devenue classique, de Lejeune-Dirichlet [1] pour parvenir au théorème suivant :

Un système dont la température est maintenue constante est assurément en équilibre stable dans un état où son potentiel thermodynamique total présente une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la même température.

Il n'est pas du tout certain qu'il n'y ait, pour un système, d'autre état d'équilibre stable que ceux qui correspondent à un minimum du potentiel thermodynamique total.

Dans ce qui va suivre, lorsque nous parlerons d'un système *en équilibre*, nous entendrons désigner abréviativement par là un sys-

(1) Lejeune-Dirichlet, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichts* (*Journal de Crelle*, t. 22, p. 85; 1846).

tème dont le potentiel thermodynamique total a une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la même température.

5. *Déplacement de l'équilibre par une variation de température.* — Un système est en équilibre, à une température donnée $\mathfrak{T}$, lorsqu'il est soumis aux actions A, B, ..., L; les variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, qui, avec la température $\mathfrak{T}$, achèvent de déterminer ce système, ont, dans cet état, des valeurs données par les équations

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \mathrm{A}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \mathrm{B}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = \mathrm{L}.$$

Supposons que les actions A, B, ..., L admettent un potentiel Ω, qui sera une fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, mais point de $\mathfrak{T}$ (Chap. I, n° **5**) et posons, conformément à l'égalité (1), $\Phi = \mathcal{F} + \Omega$. Les équations précédentes pourront s'écrire

$$(5) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0.$$

Résolues par rapport à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ces équations deviennent

$$\alpha = \alpha(\mathfrak{T}), \qquad \beta = \beta(\mathfrak{T}), \qquad \ldots, \qquad \lambda = \lambda(\mathfrak{T}).$$

A la température $(\mathfrak{T} + d\mathfrak{T})$, sous l'action des mêmes corps étrangers, il s'établira un nouvel état d'équilibre, dans lequel les variables normales qui définissent l'état du système auront les nouvelles valeurs

$$\alpha' = \alpha(\mathfrak{T}) + \frac{d\alpha(\mathfrak{T})}{d\mathfrak{T}}\, d\mathfrak{T},$$
$$\beta' = \beta(\mathfrak{T}) + \frac{d\beta(\mathfrak{T})}{d\mathfrak{T}}\, d\mathfrak{T},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda' = \lambda(\mathfrak{T}) + \frac{d\lambda(\mathfrak{T})}{d\mathfrak{T}}\, d\mathfrak{T}.$$

Les équations d'équilibre (5), différentiées par rapport à $\mathfrak{T}$, donnent

le système d'équations

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{T}} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \beta} \dfrac{d\beta}{d\mathfrak{T}} + \ldots + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \lambda} \dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{T}} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \mathfrak{T}} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \alpha} \dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{T}} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \dfrac{d\beta}{d\mathfrak{T}} + \ldots + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \lambda} \dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{T}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \mathfrak{T}} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \alpha} \dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{T}} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \beta} \dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{T}} + \ldots + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} \dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{T}} = 0. \end{array} \right.$$

Multiplions les deux membres de la première de ces équations par $\dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{T}}$, les deux membres de la seconde par $\dfrac{d\beta}{d\mathfrak{T}}$, ..., les deux membres de la dernière par $\dfrac{\partial\lambda}{\partial\mathfrak{T}}$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus : nous obtiendrons l'égalité suivante

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{T}} \dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{T}} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \mathfrak{T}} \dfrac{d\beta}{d\mathfrak{T}} + \ldots + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \mathfrak{T}} \dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{T}} \\ \quad + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \left(\dfrac{d\alpha}{d\mathfrak{T}}\right)^2 + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \left(\dfrac{d\beta}{d\mathfrak{T}}\right)^2 + \ldots + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \left(\dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{T}}\right)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2 \sum \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu} \dfrac{d\lambda}{d\mathfrak{T}} \dfrac{d\mu}{d\mathfrak{T}} = 0. \end{array} \right.$$

Dans cette égalité, on doit attribuer au symbole $\sum \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu} \dfrac{d\mu}{d\mathfrak{T}} \dfrac{d\nu}{d\mathfrak{T}}$ la signification suivante :

On considère toutes les valeurs, distinctes les unes des autres, de la quantité $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu} \dfrac{d\mu}{d\mathfrak{T}} \dfrac{d\nu}{d\mathfrak{T}}$ que l'on peut obtenir en remplaçant μ et ν par deux lettres, distinctes les unes des autres, prises dans l'ensemble α, β, ..., λ, et l'on fait la somme de toutes ces valeurs distinctes.

Par hypothèse, les valeurs de α, β, ..., λ, que définissent les égalités (5), donnent à Φ une valeur minimum parmi toutes celles qu'il peut prendre à la température $\mathfrak{T}$. Dès lors, si l'on donne à α, β, ..., λ ces valeurs, on est assuré que la forme quadratique

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} a^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} b^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} l^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu} mn$$

est positive, quelles que soient les valeurs, différentes de o, que l'on attribue aux quantités $a, b, \ldots, l$.

Il en sera ainsi, en particulier, si l'on fait

$$a = \frac{d\alpha}{d\vartheta}, \qquad b = \frac{d\beta}{d\vartheta}, \qquad \ldots, \qquad l = \frac{d\lambda}{d\vartheta}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{d\vartheta}\right)^5 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2}\left(\frac{d\beta}{d\vartheta}\right)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{d\vartheta}\right)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu}\, \frac{d\mu}{d\vartheta}\, \frac{d\nu}{d\vartheta} > 0.$$

Cette inégalité, jointe à l'égalité (7), donne l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\, \frac{d\alpha}{d\vartheta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\, \frac{d\beta}{d\vartheta} + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\, \frac{d\lambda}{d\vartheta} < 0.$$

Posons

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{d\vartheta}\, d\vartheta, \qquad d\beta = \frac{d\beta}{d\vartheta}\, d\vartheta, \qquad d\lambda = \frac{d\lambda}{d\vartheta}\, d\vartheta.$$

L'inégalité que nous venons d'obtenir pourra s'énoncer de la manière suivante.

La quantité

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\, d\alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\, d\beta + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\, d\lambda$$

est de signe contraire à $d\vartheta$.

Les actions extérieures A, B, ..., L, égales au signe près aux dérivées partielles de la fonction Ω par rapport à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, sont indépendantes de la température ϑ; on a donc

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha\, \partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta\, \partial \vartheta} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda\, \partial \vartheta} = 0.$$

Dès lors, en vertu de l'égalité (1), le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer ainsi :

La quantité

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial \vartheta}\, d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta\, \partial \vartheta}\, d\beta + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\, \partial \vartheta}\, d\lambda$$

est de signe contraire à $d\vartheta$.

En vertu de l'égalité (5 *bis*) du Chapitre I, la quantité (8) peut s'écrire

$$- \mathrm{E}\,\mathrm{F}'(\mathfrak{S})\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda}\,d\lambda\right).$$

En vertu des égalités (3) du même Chapitre, elle devient

$$- \frac{\mathrm{E}\,\mathrm{F}'(\mathfrak{S})}{\mathrm{F}(\mathfrak{S})}(\mathrm{R}_\alpha\,d\alpha + \mathrm{R}_\beta\,d\beta + \ldots + \mathrm{R}_\lambda\,d\lambda).$$

La quantité $\frac{\mathrm{F}'(\mathfrak{S})}{\mathrm{F}(\mathfrak{S})}$ étant assurément positive, on voit que la quantité

$$\mathrm{R}_\alpha\,d\alpha + \mathrm{R}_\beta\,d\beta + \ldots + \mathrm{R}_\lambda\,d\lambda$$

est de même signe que $d\mathfrak{S}$, ce qui exprime la loi suivante :

Considérons un système soumis à des actions qui admettent un potentiel. Ce système est en équilibre à une température donnée. Si l'on élève cette température, il s'établit un équilibre différent du premier; les variables normales qui caractérisent l'état du système subissent certaines variations; si elles subissaient ces mêmes variations à température constante, la modification virtuelle imposée au système entraînerait une absorption de chaleur.

Cette loi, entrevue par Lavoisier et Laplace, a été énoncée par M. J.-H. Van t' Hoff.

4. *Déplacement isothermique de l'équilibre.* — Un système est soumis à des actions constantes A, B, ..., L, et porté à la température $\mathfrak{S}$; il prend un certain état d'équilibre stable rendant minimum le potentiel thermodynamique sous les actions constantes A, B, ..., L. Les variables normales α, β, ..., λ ont des valeurs définies en fonctions de A, B, ..., L, $\mathfrak{S}$, par les équations

$$(9)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \mathrm{A}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \mathrm{B}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = \mathrm{L}.$$

Laissons à la température la valeur $\mathfrak{S}$ et donnons aux actions A,

B, ..., L, de nouvelles valeurs, voisines des précédentes, $(A+dA)$, $(B+dB)$, ..., $(L+dL)$; le système prendra un nouvel état d'équilibre défini par des valeurs $(\alpha+d\alpha)$, $(\beta+d\beta)$, ..., $(\lambda+d\lambda)$ des variables normales α, β, ..., λ, en posant pour abréger

$$d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial A}\,dA + \frac{\partial\alpha}{\partial B}\,dB + \ldots + \frac{\partial\alpha}{\partial L}\,dL,$$

$$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial A}\,dA + \frac{\partial\beta}{\partial B}\,dB + \ldots + \frac{\partial\beta}{\partial L}\,dL,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial A}\,dA + \frac{\partial\lambda}{\partial B}\,dB + \ldots + \frac{\partial\lambda}{\partial L}\,dL.$$

Les égalités (9), différentiées, nous donneront

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\,d\alpha + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\lambda}\,d\lambda = dA,$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta\,\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta\,\partial\lambda}\,d\lambda = dB,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda^2}\,d\lambda = dL.$$

Multiplions la première de ces égalités par $d\alpha$, la seconde par $d\beta$, ..., la dernière par $d\lambda$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}(d\beta)^2 + \ldots + \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu \\ &\qquad = dA\,d\alpha + dB\,d\beta + \ldots + dL\,d\lambda. \end{aligned}\right.$$

Proposons-nous de déterminer le signe du premier membre de l'égalité (10).

Considérons le potentiel thermodynamique sous les actions constantes A, B, ..., L.

$$(11)\qquad \Phi = \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}) - (A\alpha + B\beta + \ldots + L\lambda).$$

Par hypothèse, les valeurs de α, β, ..., λ, que définissent les égalités (9), font prendre à ce potentiel une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la température $\mathfrak{T}$. Si donc on donne à α, β, ..., λ ces valeurs, la forme quadratique

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} a^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} b^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} l^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu} mn$$

sera positive quelles que soient les valeurs non nulles attribuées aux quantités a, b, ..., l; elle le sera, en particulier, si l'on pose

$$a = d\alpha, \qquad b = d\beta, \qquad \ldots, \qquad l = d\lambda.$$

On aura donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} (da)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} (db)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} (dl)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu} dm\, dn > 0.$$

Mais les actions A, B, ..., L, qui figurent dans l'expression (11) de Φ, étant des constantes, on a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu\, \partial \nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} (d\beta)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu} d\mu\, d\nu > 0.$$

L'égalité (10) nous conduit donc à l'inégalité

$$d\mathrm{A}\, d\alpha + d\mathrm{B}\, d\beta + \ldots + d\mathrm{L}\, d\lambda > 0,$$

qui exprime la proposition suivante :

Un système est en équilibre, à une température donnée, sous certaines actions extérieures; à ces actions extérieures, on ajoute certaines actions perturbatrices infiniment petites, la température demeurant la même; l'équilibre primitif est troublé, et un nouvel

état d'équilibre s'établit; dans le passage de l'ancien état d'équilibre au nouveau, les actions perturbatrices effectuent toujours un travail positif.

Un cas particulier de cette loi avait été énoncé par M. H. Le Chatelier.

5. *Stabilité isentropique de l'équilibre.* — On nomme, d'après M. Gibbs, *modification isentropique* une modification durant laquelle l'entropie du système demeure invariable; dans une semblable modification, les variations $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, $d\Xi$ des variables normales sont liées par la relation

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\,d\lambda + \frac{\partial S}{\partial \Xi}\,d\Xi = 0. \tag{12}$$

Les modifications isentropiques sont intéressantes à considérer en ce que si le système qui décrit une modification isentropique est à chaque instant en équilibre sous l'action des corps extérieurs, la modification isentropique qu'il décrit est ce que nous avons nommé une *modification adiabatique réversible;* réciproquement, toute modification adiabatique réversible est isentropique.

Imaginons un système soumis à des actions extérieures qui admettent un potentiel Ω, et supposons ce système en équilibre. Nous avons

$$\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial \beta} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial \lambda} = 0.$$

Ces égalités peuvent encore s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} E\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - E\,F(\Xi)\dfrac{\partial S}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = 0, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \beta} - E\,F(\Xi)\dfrac{\partial S}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \beta} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - E\,F(\Xi)\dfrac{\partial S}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

Joignons-y l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0$$

qui peut encore s'écrire, puisque Ω peut toujours être pris indépendant de ϑ,

$$(13\,bis) \qquad E\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - E\,F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} = 0.$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (13) par $d\alpha$, les deux membres de la seconde par $d\beta$, ..., les deux membres de la dernière par $d\lambda$, les deux membres de l'égalité (13 *bis*) par $d\vartheta$, $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, $d\vartheta$ définissant une modification isentropique; ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de l'égalité (12) et nous trouverons

$$(14) \qquad d(EU + \Omega) = 0.$$

Ainsi *toute modification isentropique imposée à un système à partir d'un état d'équilibre vérifie l'égalité* (14); du reste, cette égalité exprime simplement que la modification considérée est adiabatique.

Reprenons l'égalité générale [(Chap. II, égalité (11)],

$$d\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\,d\vartheta + d\Omega = -\,d\mathfrak{T} + f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda.$$

Elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} &E\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\,d\lambda\right) \\ &\quad - EF(\vartheta)\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\,d\lambda\right) + d\Omega \\ &= -\,d\mathfrak{T} + f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda \end{aligned}$$

et l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} - F(\vartheta)\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0$$

permet de la transformer en

$$d(\mathrm{EU} + \Omega) - \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{S})\,d\mathrm{S} = -\,d\mathfrak{T} + f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda.$$

Pour une modification isentropique, cette égalité se réduit à

$$(15) \qquad d(\mathrm{EU} + \Omega) = -\,d\mathfrak{T} + f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda.$$

La quantité

$$f_\alpha\,d\alpha + f_\beta\,d\beta + \ldots + f_\lambda\,d\lambda$$

ne pouvant jamais être positive, on peut, à partir des égalités (14) et (15), construire une démonstration semblable à celle de Lejeune-Dirichlet, et obtenir le théorème suivant :

L'équilibre d'un système est assurément stable pour toutes les modifications isentropiques que l'on peut lui imposer si la quantité $(\mathrm{EU} + \Omega)$ *a une valeur minima parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans changement de valeur de l'entropie.*

Ce théorème a été énoncé par M. J.-W. Gibbs. On peut dire avec lui que si la quantité $(\mathfrak{F} + \Omega)$ est le *potentiel thermodynamique à température constante*, la quantité $(\mathrm{EU} + \Omega)$ est le *potentiel thermodynamique à entropie constante*.

Considérons un système en équilibre. Si l'équilibre de ce système est stable pour toutes les modifications isothermiques qu'on peut lui imposer, est-il stable aussi pour toutes les modifications isentropiques? En d'autres termes, s'il est stable lorsqu'on suppose le système entouré de sources de chaleur qui en maintiennent la température constante, est-il encore stable lorsqu'on suppose le système entouré d'une enceinte imperméable à la chaleur?

Pour répondre à cette question, il nous faut invoquer un postulat fondamental, que nous nommerons *Postulat d'Helmholtz*, M. H. von Helmholtz étant le seul physicien, à notre connaissance, qui l'ait explicitement énoncé [1]. Ce postulat est le suivant :

---

[1] H. VON HELMHOLTZ, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge*. I. (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1882, 1er semestre, p. 12 et 19).

Postulat d'Helmholtz. — *Lorsqu'un système est rapporté à des variables normales, la capacité calorifique de ce système est positive.*

Ce postulat s'exprime par l'inégalité

$$(16) \qquad C > 0,$$

que les égalités

$$C = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{z}},$$

$$C = F(\mathfrak{z}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}},$$

$$C = \frac{F(\mathfrak{z}) F''(\mathfrak{z})}{E[F'(\mathfrak{z})]^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}} - \frac{F(\mathfrak{z})}{E F'(\mathfrak{z})} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}^2}$$

permettent d'écrire sous l'une quelconque des trois formes

$$(16\,bis) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \mathfrak{z}} > 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}} > 0, \\ \dfrac{F''(\mathfrak{z})}{F'(\mathfrak{z})} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{z}^2} > 0. \end{cases}$$

Il faut bien observer que ce postulat pourrait cesser d'être conforme à l'expérience si le système n'était pas défini par des variables normales; c'est ainsi que la capacité calorifique de la vapeur d'eau *sous tension de vapeur saturée* est négative. Cette remarque montre en outre que le postulat qui précède, pour naturel qu'il paraisse, n'est ni évident, ni nécessaire.

Ce postulat admis, nous allons montrer que la stabilité isothermique de l'équilibre entraîne la stabilité isentropique.

Conservons le symbole d pour désigner les variations isentropiques et servons-nous du symbole δ pour désigner les variations isothermiques. La proposition à démontrer se ramène évidemment à celle-ci : *Sachant que, pour un système en équilibre, on a*

$$(17) \qquad \delta^2(\mathcal{F} + \Omega) > 0,$$

démontrer que l'on a

$$(18)\qquad d^2(\mathrm{EU}+\Omega)>0.$$

L'inégalité (17) peut s'écrire plus explicitement

$$(17\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathfrak{F}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(\delta\alpha)^2+\ldots\\ &\quad+\frac{\partial^2(\mathfrak{F}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(\delta\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2(\mathfrak{F}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}\delta\mu\,\delta\nu>0.\end{aligned}\right.$$

Dans une modification isothermique, les quantités $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$ sont absolument arbitraires; l'inégalité précédente (17 *bis*) aura donc encore lieu si l'on remplace $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$ par les variations $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$, qui correspondent à une modification isentropique. Nous aurons par conséquent, pour toute modification isentropique,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathfrak{F}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots\\ &\quad+\frac{\partial^2(\mathfrak{F}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2(\mathfrak{F}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu>0.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, l'identité

$$(12)\qquad \frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\alpha}d\alpha+\ldots+\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\lambda}d\lambda+\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\mathfrak{z}}d\mathfrak{z}=0,$$

qui définit une modification isentropique, donne par différentiation

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\mathrm{S}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots+\frac{\partial^2\mathrm{S}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2\mathrm{S}}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu\\ &\quad+\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\lambda}d^2\lambda\\ &\quad+\left(2\frac{\partial^2\mathrm{S}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{z}}d\alpha+\ldots+2\frac{\partial^2\mathrm{S}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{z}}d\lambda+\frac{\partial^2\mathrm{S}}{\partial\mathfrak{z}^2}d\mathfrak{z}\right)d\mathfrak{z}+\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\mathfrak{z}}d^2\mathfrak{z}=0.\end{aligned}\right.$$

Ajoutons membre à membre l'inégalité (19) et l'égalité (20), cette dernière ayant été au préalable multipliée par $\mathrm{E\,F}(\mathfrak{z})$; tenons compte, en outre, de l'identité

$$(21)\qquad \mathfrak{F}+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{z})\mathrm{S}=\mathrm{EU},$$

et nous obtiendrons l'inégalité

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots\\ &\quad+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu\\ &\quad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{S})\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\lambda}d^2\lambda\right)\\ &\quad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{S})\left(2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{S}}d\alpha+\ldots+2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{S}}d\lambda+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{S}^2}d\mathfrak{S}\right)d\mathfrak{S}\\ &\qquad\qquad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{S})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{S}}d^2\mathfrak{S}>0.\end{aligned}\right.$$

Mais le système étant en équilibre, on a

$$\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\alpha}=0,\qquad\ldots,\qquad\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\lambda}=0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathcal{F}+\Omega)}{\partial\lambda}d^2\lambda=0,$$

ce qui, en vertu de l'identité (21), peut s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda}d^2\lambda\\ =\mathrm{E\,F}(\mathfrak{S})\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\alpha}d^2\lambda+\ldots+\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\lambda}d^2\lambda\right).\end{aligned}$$

Moyennant cette égalité, l'inégalité (22) devient

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots\\ &\quad+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+2\sum\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}d\mu\,d\nu\\ &\quad+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha}d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda}d^2\lambda\\ &\quad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{S})\left(2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{S}}d\alpha+\ldots+2\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{S}}d\lambda+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{S}^2}d\mathfrak{S}\right)d\mathfrak{S}\\ &\qquad\qquad+\mathrm{E\,F}(\mathfrak{S})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{S}}d^2\mathfrak{S}>0.\end{aligned}\right.$$

L'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{z}} = F(\mathfrak{z}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}}$$

peut s'écrire, en observant que Ω est indépendant de $\mathfrak{z}$,

$$E F(\mathfrak{z}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}} d\mathfrak{z} = \frac{\partial (EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{z}} d\mathfrak{z}.$$

Différentiée, elle donne

$$\begin{aligned} & E F(\mathfrak{z}) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \, \partial \mathfrak{z}} d\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda \, \partial \mathfrak{z}} d\lambda + \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{z}^2} d\mathfrak{z} \right) d\mathfrak{z} \\ & \quad + E F'(\mathfrak{z}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}} (d\mathfrak{z})^2 + E F(\mathfrak{z}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}} d^2 \mathfrak{z} \\ & = \left[\frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \alpha \, \partial \mathfrak{z}} d\alpha + \ldots \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \lambda \, \partial \mathfrak{z}} d\lambda + \frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{z}^2} d\mathfrak{z} + \right] d\mathfrak{z} + \frac{\partial (EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{z}} d^2 \mathfrak{z}. \end{aligned}$$

Comparée à l'inégalité (23), cette égalité nous permet d'écrire

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \ldots \\ & \quad + \frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \mu \, \partial \nu} d\mu \, d\nu \\ & \quad + \left[\frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \alpha \, \partial \mathfrak{z}} d\alpha + \ldots \right. \\ & \qquad \left. + \frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \lambda \, \partial \mathfrak{z}} d\lambda + \frac{\partial^2 (EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{z}^2} d\mathfrak{z} \right] d\mathfrak{z} \\ & \quad + \frac{\partial (EU + \Omega)}{\partial \alpha} d^2 \alpha + \ldots \\ & \quad + \frac{\partial (EU + \Omega)}{\partial \lambda} d^2 \lambda + \frac{\partial (EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{z}} d^2 \mathfrak{z} \\ & \quad + E F(\mathfrak{z}) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \, \partial \mathfrak{z}} d\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda \, \partial \mathfrak{z}} d\lambda \right) d\mathfrak{z} \\ & \qquad - E F'(\mathfrak{z}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}} (d\mathfrak{z})^2 > 0. \end{aligned} \right.$$

L'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{z}} = F(\mathfrak{z}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{z}},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial \mathfrak{z}} = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{z})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathfrak{z}}$$

donne les identités

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{z}} = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{z})\dfrac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{z}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{z}} = \mathrm{E}\,\mathrm{F}(\mathfrak{z})\dfrac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{z}}. \end{array}\right.$$

Moyennant ces égalités (25), l'inégalité (24) devient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2+\ldots+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mathfrak{z}^2}(d\mathfrak{z})^2 \\ &\quad+2\sum\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu \\ &\quad+2\left[\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{z}}\,d\alpha+\ldots+\frac{\partial^2(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{z}}\,d\lambda\right]d\mathfrak{z} \\ &\quad+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\alpha}\,d^2\alpha+\ldots+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\lambda}\,d^2\lambda+\frac{\partial(\mathrm{EU}+\Omega)}{\partial\mathfrak{z}}\,d^2\mathfrak{z} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad -\mathrm{E}\mathrm{F}'(\mathfrak{z})\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\mathfrak{z}}(d\mathfrak{z})^2>0, \end{aligned}$$

ou bien

$$d^2(\mathrm{EU}+\Omega)-\mathrm{E}\frac{\mathrm{F}'(\mathfrak{z})}{\mathrm{F}(\mathfrak{z})}\,\mathrm{C}(d\mathfrak{z})^2>0.$$

Les quantités E, $\mathrm{F}(\mathfrak{z})$, $\mathrm{F}'(\mathfrak{z})$, sont essentiellement positives; d'après le postulat d'Helmholtz, il en est de même de la quantité C; l'inégalité précédente exige donc que l'on ait

$$d^2(\mathrm{EU}+\Omega)>0.$$

C'est l'inégalité (18) que nous voulions démontrer.

6. *Déplacement isentropique de l'équilibre.* — Prenons un système en équilibre stable, pour les modifications isothermiques, sous les actions constantes A, B, ..., L. La quantité

$$\Phi = \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z}) - (\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \ldots + \mathrm{L}\lambda).$$

dans laquelle les quantités A, B, ..., L sont indépendantes des variables α, β, ..., λ, a une valeur minima parmi celles qu'elle peut prendre à la même température $\mathfrak{S}$. On a donc, en premier lieu,

$$(26) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - A = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} - L = 0;$$

en second lieu,

$$(27) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(\delta\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(\delta\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu}\,\delta\mu\,\delta\nu > 0.$$

Cette dernière inégalité a lieu quelles que soient les valeurs non toutes nulles de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$.

Donnons aux actions A, B, ..., L des variations infiniment petites dA, dB, ..., dL, tandis que le système ne peut échanger de chaleur avec l'extérieur. Le système éprouvera une modification isentropique et parviendra à un nouvel état d'équilibre. Dans cet état, les variables normales qui définissent le système auront les nouvelles valeurs

$$\alpha + d\alpha, \quad \ldots, \quad \lambda + d\lambda, \quad \mathfrak{S} + d\mathfrak{S}.$$

La modification étant isentropique, on devra avoir l'égalité

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}\,d\alpha + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\,d\lambda + \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}}\,d\mathfrak{S} = 0,$$

que l'identité

$$E\,F'(\mathfrak{S})\,S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}}$$

permet de transformer en

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{S}}\,d\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\, \partial \mathfrak{S}}\,d\lambda + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}^2}\,d\mathfrak{S} - \frac{F''(\mathfrak{S})}{F'(\mathfrak{S})}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{S}}\,d\mathfrak{S} = 0.$$

D'autre part, les égalités (26) donnent, par différentiation,

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\,d\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial \lambda}\,d\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{S}}\,d\mathfrak{S} = dA, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\, \partial \alpha}\,d\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}\,d\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\, \partial \mathfrak{S}}\,d\mathfrak{S} = dL. \end{array} \right.$$

Multiplions la première des égalités (29) par $d\alpha$, ..., la dernière par $d\lambda$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu \\ + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{S}}\,d\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{S}}\,d\lambda\right)d\mathfrak{S} \\ = d\mathrm{A}\,d\alpha + \ldots + d\mathrm{L}\,d\lambda,\end{aligned}$$

égalité que la relation (28) transforme en

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu \\ - \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mathfrak{S}^2} - \frac{\mathrm{F}''(\mathfrak{S})}{\mathrm{F}'(\mathfrak{S})}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\mathfrak{S}}\right](d\mathfrak{S})^2 \\ = d\mathrm{A}\,d\alpha + \ldots + d\mathrm{L}\,d\lambda,\end{aligned}$$

ou bien en

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}& d\mathrm{A}\,d\alpha + \ldots + d\mathrm{L}\,d\lambda \\ &\quad = \frac{\mathrm{E}\mathrm{F}'(\mathfrak{S})}{\mathrm{F}(\mathfrak{S})}\,\mathrm{C}(d\mathfrak{S})^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \ldots \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu.\end{aligned}\right.$$

L'inégalité (27) ayant lieu quels que soient $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$ doit avoir lieu si l'on fait

$$\delta\alpha = d\alpha, \qquad \ldots, \qquad \delta\lambda = d\lambda.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(d\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(d\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,d\mu\,d\nu > 0.$$

D'autre part, le postulat d'Helmholtz donne

$$\frac{\mathrm{E}\,\mathrm{F}'(\mathfrak{S})}{\mathrm{F}(\mathfrak{S})}\,\mathrm{C}(d\mathfrak{S})^2 > 0.$$

On a donc

$$(31)\qquad d\mathrm{A}\,d\alpha + \ldots + d\mathrm{L}\,d\lambda > 0.$$

Cette inégalité (31) équivaut au théorème suivant :

Un système est en équilibre sous certaines actions extérieures; il ne peut éprouver que des modifications isentropiques; on ajoute aux actions extérieures des actions perturbatrices infiniment petites; le système parvient à un nouvel état d'équilibre; dans le passage de l'ancien état d'équilibre au nouveau, les actions perturbatrices effectuent toujours un travail positif.

Ce principe du déplacement isentropique de l'équilibre est utile dans la discussion de certains problèmes relatifs à la détente des vapeurs.

7. *La chaleur spécifique sous actions constantes.* — Imaginons un système maintenu en équilibre par des actions extérieures constantes A, B, ..., L. Il passe d'un état défini par des valeurs α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$, des variables normales, à un nouvel état défini par des valeurs $(\alpha + D\alpha)$, $(\beta + D\beta)$, ..., $(\lambda + D\lambda)$, $(\mathfrak{S} + D\mathfrak{S})$ des variables normales.

Les équations d'équilibre

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - A = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} - L = 0$$

donnent par différentiation

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} D\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial \lambda} D\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial \mathfrak{S}} D\mathfrak{S} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\, \partial \alpha} D\alpha + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} D\lambda + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\, \partial \mathfrak{S}} D\mathfrak{S} = 0. \end{array} \right.$$

Ces égalités nous donnent pour $D\alpha$, $D\beta$, ..., $D\lambda$ des valeurs proportionnelles à $D\mathfrak{S}$, les coefficients de proportionnalité dépendant des variables α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$.

Il en résulte que la quantité de chaleur absorbée dans la modification précédente,

$$R_\alpha D\alpha + \ldots + R_\lambda D\lambda + C D\mathfrak{S},$$

peut s'écrire $\Gamma D\mathfrak{S}$, Γ étant une fonction de α, β, ..., λ, $\mathfrak{S}$.

Γ est ce que nous nommerons la *capacité calorifique sous les actions constantes* A, B, ..., L. C'est la capacité calorifique relative au système de variables (¹) non normal A, B, ..., L, $\mathfrak{S}$.

On a donc, par définition,

$$(\Gamma - C)\,D\mathfrak{S} = R_\alpha\,D\alpha + \ldots + R_\lambda\,D\lambda,$$

ou bien [Chap. I, égalités (7 *bis*)],

$$(33)\qquad (\Gamma - C)\,D\mathfrak{S} = -\frac{F(\mathfrak{S})}{E\,F'(\mathfrak{S})}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{S}}\,D\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{S}}\,D\lambda\right)$$

Mais des égalités (32), on déduit aisément l'égalité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,D\mu\,D\nu$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathfrak{S}}\,D\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\mathfrak{S}}\,D\lambda\right) D\mathfrak{S} = 0.$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (33), donne

$$(34)\qquad \begin{cases} (\Gamma - C)(D\mathfrak{S})^2 \\ \quad = \dfrac{F(\mathfrak{S})}{E\,F'(\mathfrak{S})}\left[\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,D\mu\,D\nu\right]. \end{cases}$$

Si le système est en équilibre stable lorsque les actions extérieures A, B, ..., L sont maintenues constantes, la quantité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\alpha^2}(\delta\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\lambda^2}(\delta\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mu\,\partial\nu}\,\delta\mu\,\delta\nu$$

est, comme nous l'avons vu au n° 4, positive quels que soient $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$. L'égalité (34) nous donne donc l'inégalité

$$\Gamma - C > 0.$$

(¹) Au sujet de ce système de variables, *voir* notre *Mémoire sur les équations générales de la Thermodynamique*, Chap. V (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. VII, 1891).

Par conséquent, *si un système est en équilibre stable lorsqu'on maintient constantes les actions extérieures qui le sollicitent, sa capacité calorifique est plus grande lorsqu'on maintient constantes les actions* A, B, ..., L, *que lorsqu'on maintient constantes les variables normales* α, β, ..., λ.

Imaginons que l'on veuille imposer aux variables α, β, ..., λ les variations $D\alpha$, $D\beta$, ..., $D\lambda$, la température $\mathfrak{S}$ étant maintenue constante. Il faudra adjoindre aux actions extérieures A, B, ..., L des actions perturbatrices δA, δB, ..., δL. On aurait, d'après l'égalité (10),

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta A\, D\alpha + \ldots + \delta L\, D\lambda \\ &\quad = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu} D\mu\, D\nu. \end{aligned}\right.$$

Imaginons que l'on veuille imposer aux variables α, β, ..., λ les mêmes variations $D\alpha$, ..., $D\lambda$ par une modification isentropique; la température variera alors d'une quantité $d\mathfrak{S}$ définie par l'égalité

$$(36)\qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha} D\alpha + \ldots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} D\lambda + \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S} = 0.$$

Pour accomplir cette transformation isentropique, on devra adjoindre aux actions extérieures des actions perturbatrices dA, dB, ..., dL, et l'on aura, d'après l'égalité (30),

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &dA\, D\alpha + \ldots + dL\, D\lambda \\ &\quad = \frac{E\,F'(\mathfrak{S})}{F(\mathfrak{S})} C(d\mathfrak{S})^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(D\alpha)^2 + \ldots \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}(D\lambda)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu\, \partial \nu} D\mu\, D\nu. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (34), (35), (37) donnent

$$\frac{E\,F'(\mathfrak{S})}{F(\mathfrak{S})}(\Gamma - C)(D\mathfrak{S})^2 = \delta A\, D\alpha + \ldots + \delta L\, D\lambda,$$

$$\frac{E\,F'(\mathfrak{S})}{F(\mathfrak{S})} C(d\mathfrak{S})^2 = (dA - \delta A)\, D\alpha + \ldots + (dL - \delta L)\, D\lambda.$$

On déduit de là

$$\frac{\Gamma - C}{C}\left(\frac{D\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}}\right)^2 = \frac{\delta \mathrm{A}\, D\alpha + \ldots + \delta \mathrm{L}\, D\lambda}{(d\mathrm{A} - \delta \mathrm{A})\, D\alpha + \ldots + (d\mathrm{L} - \delta \mathrm{L})\, D\lambda}. \tag{38}$$

Cette relation, où $D\mathfrak{z}$ vérifie les égalités (32) et $d\mathfrak{z}$ l'égalité (36), est la généralisation de celle par laquelle Laplace a expliqué l'expérience de Desormes et Clément.

CONCLUSION.

Les physiciens qui ont traité de la Thermodynamique ont placé cette science, vis-à-vis de la Dynamique, dans deux positions distinctes.

Les fondateurs de la Thermodynamique ont presque tous incliné à faire de cette science une application de la Dynamique; regardant la chaleur comme un mouvement très petit et très rapide des particules qui constituent les corps, la température comme la force vive moyenne de ce mouvement, les changements d'état physique comme des modifications dans les éléments caractéristiques de ce mouvement, ils ont tenté de déduire les théorèmes de la Thermodynamique des théorèmes de la Mécanique rationnelle; leurs tentatives ont été aisément couronnées de succès dans le domaine du principe de la conservation de l'énergie; elles ont été moins heureuses lorsqu'elles ont abordé le principe de Carnot; malgré les essais audacieux de Clausius, de M. Boltzmann et de M. H. von Helmholtz, le principe de Carnot n'a pu, jusqu'ici, être déduit d'une manière pleinement satisfaisante des propositions de la Dynamique.

Beaucoup de physiciens ont cherché à rendre la Thermodynamique indépendante de toute hypothèse sur la nature de la chaleur; ils ont essayé de l'établir non sur des théorèmes empruntés à la Mécanique rationnelle, mais sur des principes qui lui soient propres; Clausius avait déjà été guidé, dans la rédaction de ses plus beaux Mémoires, par le désir de faire de la Thermodynamique une science indépendante; G. Kirchhoff, comme en témoignent ses *Leçons* récemment publiées, avait montré, dans son enseignement, que ce désir pouvait être réalisé; élève de G. Kirchhoff, M. G. Lippmann a préconisé en

France cette tendance qui domine, aujourd'hui, dans l'enseignement de nos Facultés.

Nous avons essayé, dans le présent travail, d'indiquer une troisième position de la Dynamique par rapport à la Thermodynamique; nous avons fait de la Dynamique un cas particulier de la Thermodynamique, ou plutôt, nous avons constitué, sous le nom de *Thermodynamique*, une science qui embrasse dans des principes communs tous les changements d'état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques.

Les principes de cette science sont les lois expérimentales que Sadi Carnot, Mayer, Joule, Clausius, W. Thomson, Helmholtz ont établies ou éclaircies. Sa mise en équations, ébauchée par Clausius, perfectionnée par Massieu, Gibbs et Helmholtz, nous ramène à une forme analytique semblable à celle que Lagrange a donnée à la Mécanique; ainsi se trouve maintenue, au travers des évolutions de la Science, cette continuité de tradition qui en assure le progrès.

Il nous semble qu'une conclusion générale se dégage de cette étude : si la science des mouvements cesse d'être, dans l'ordre logique, la première des Sciences physiques, pour devenir seulement un cas particuler d'une science plus générale embrassant dans ses formules toutes les modifications des corps, la tentation sera moindre, pensons-nous, de ramener l'étude de tous les phénomènes physiques à l'étude du mouvement; on comprendra mieux que le changement de lieu dans l'espace n'est pas une modification plus simple que le changement de température ou de quelque autre qualité physique; on fuira dès lors plus volontiers ce qui a été jusqu'ici le plus dangereux écueil de la Physique théorique, la recherche d'une explication mécanique de l'Univers.

Note au sujet d'un Mémoire de M. Painlevé *sur les équations de la Dynamique;*

Par M. R. LIOUVILLE.

Dans un travail inséré au dernier Cahier de ce Journal, M. Painlevé publie les résultats qu'il a obtenus sur une question dont nous avons tous deux fait une étude, à l'occasion de recherches plus générales.

Je ne veux nullement ouvrir une discussion nouvelle sur le sujet dont il s'agit, mais je ne puis éviter de présenter une observation touchant un point particulier sur lequel M. Painlevé revient plusieurs fois, les termes dont il se sert laissant croire à une inexactitude que je n'ai pas commise.

La Note que j'ai publiée le 6 avril 1891, dans les *Comptes rendus* de l'Académie, était relative aux cas où *les équations différentielles du mouvement* ne dépendent que de trois paramètres et peuvent correspondre à deux expressions différentes de la force vive.

En citant cette Note, M. Painlevé s'exprime ainsi, à la page 19 de son travail :

« Sur ce problème, M. Liouville avait antérieurement publié deux Notes; dans la première, il déterminait tous les ds^2 à deux ou trois paramètres, tels que le mouvement défini par le système

$$\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, Q_i = 0\right]$$

fût défini par un autre système

$$\left[\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2, Q_i\right] = 0$$

et que, de plus, les discriminants Δ *et* Δ_1 *de* ds^2 *et* ds_1^2 *fussent identiques* », et M. Painlevé ajoute en note : « d'après ce qui précède, cette seconde condition est inutile, elle est toujours conséquence de la première. »

Plus loin, à la page 89, la même assertion est reproduite.

Elle contient une erreur de fait que la lecture de ma Note du 6 avril 1891 met en évidence. Le second alinéa de cette Note se terminait ainsi :

« Soit

$$(1) \qquad 2T = \alpha^2\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2$$

la force vive du système matériel et cherchons à choisir, pour α, β, γ, des expressions telles que *les équations différentielles du mouvement* puissent être déduites, soit de la forme quadratique précédente, soit d'une seconde forme, où entrent en général les produits $\frac{dx_2}{dt}\frac{dx_3}{dt}, \ldots$ »

On voit que je ne fais aucune mention de l'égalité des discriminants des deux formes, mais j'indique alors la condition que les équations différentielles *du mouvement* devront être les mêmes pour les deux problèmes.

Plus loin (*Comptes rendus*, p. 711), j'ajoute, il est vrai, ceci :

« Il existe des cas où, *les équations des trajectoires* étant données, il ne suffit pas de connaître le discriminant δ^2 de la forme (1) pour en conclure cette forme même. C'est dire que l'on peut choisir α, β, γ de telle manière qu'une seconde forme, *de même discriminant, corresponde aux mêmes trajectoires. Tous les cas de cette espèce* sont donnés par, etc. »

Cette fois, j'astreins les formes quadratiques à être *de même discriminant, mais je cesse d'indiquer la condition que toutes les*

équations différentielles du mouvement devront être les mêmes, et je me contente de demander, *avec l'identité des discriminants des deux formes, celle des trajectoires*.

Je n'ai donc nullement énoncé une condition superflue, comme le suppose M. Painlevé, mais j'ai énoncé, de deux manières distinctes et dont il est visible que je connaissais l'équivalence, les conditions du problème que je m'étais posé et dont je donnais la solution complète. C'est cette équivalence, retrouvée par M. Painlevé, d'une autre façon, qui fait l'objet de sa double remarque.

Sur la généralisation des fractions continues algébriques;

Par M. H. PADÉ,

Docteur ès Sciences mathématiques,
Professeur au lycée de Lille.

INTRODUCTION.

M. Hermite s'est, dans un travail récemment paru [1], occupé de la généralisation des fractions continues algébriques. La question est de déterminer les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, qui satisfont à l'équation

$$S_1X_1 + S_2X_2 + \ldots + S_nX_n = S\,x^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n+n-1},$$

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ étant des séries entières données, et S une série également entière. Ou plutôt, il s'agit d'obtenir un algorithme qui permette le calcul de proche en proche de ces systèmes de n polynomes, et qui soit analogue à l'algorithme par lequel le numérateur et le dénominateur d'une réduite d'une fraction continue se déduisent des numérateurs et dénominateurs des réduites précédentes. D'élégantes considérations, empruntées au Calcul intégral, conduisent l'éminent géomètre « à un nouveau mode de calcul, entièrement différent de l'algorithme

[1] *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. XXI, p. 289-308).

élémentaire de la théorie des fractions continues ». Ce nouveau mode de calcul repose sur la considération des systèmes de *polynomes associés*.

La première Partie de notre travail est consacrée à une exposition de la méthode de M. Hermite, mais en prenant un point de départ absolument différent. Dans le cas de deux séries S_1 et S_2, la méthode des polynomes associés repose, en effet, sur deux lois de récurrence que, avec un certain nombre d'autres, nous avons rencontrées dans un travail antérieur ([1]). Une induction facile conduit immédiatement aux lois analogues pour le cas de trois ou d'un plus grand nombre de séries. La possibilité de ramener le cas de n séries, si l'un des degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ est nul, au cas de $n-1$, que M. Hermite établit quand les séries sont des exponentielles et dont il fait ensuite usage dans le cas de trois séries quelconques, trouve sa lumineuse et complète interprétation dans l'annexion au tableau fondamental, relatif au système des n séries, des n tableaux relatifs aux systèmes de $n-1$ séries qui se déduisent du premier système.

Dans la seconde Partie, nous faisons l'extension complète, au cas de trois séries, de la théorie des fractions continues simples. Les qualités de l'algorithme qui généralise le calcul des réduites de ce groupe de fractions continues s'aperçoivent immédiatement, et, sans recourir à d'autres considérations que celles, excessivement simples, qui nous ont déjà servi autrefois, nous obtenons aisément la loi générale de formation des suites qui donnent naissance à cet algorithme; tous les modes de calcul des systèmes de polynomes *le plus entièrement analogues* à l'algorithme élémentaire de la théorie des fractions continues en découlent. Nous étudions ensuite plus complètement ceux de ces modes qui sont réguliers et qui généralisent le calcul des réduites des fractions continues régulières; ce sont de beaucoup les plus importants et ceux qui donnent, pour le calcul effectif des polynomes, les méthodes les plus simples. Nous terminons par un aperçu de

([1]) *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles* (*Thèse de Doctorat;* Gauthier-Villars, 1892). Dans le cours de ce second travail, nous renvoyons à plusieurs reprises à celui-là; nous l'indiquons par le mot *thèse*.

ce que deviennent ces différents résultats dans le cas général de n séries.

PREMIÈRE PARTIE.

LA MÉTHODE DES POLYNOMES ASSOCIÉS.

I. — Cas de deux séries.

1. Soient S_1 et S_2 deux séries entières ayant un terme constant différent de zéro. Si l'on se propose de déterminer deux polynomes X_1 et X_2, dont les degrés soient respectivement μ_1 et μ_2, et tels que l'on ait

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 = S\, x^{\mu_1+\mu_2+1},$$

S désignant une nouvelle série entière de même nature que S_1 et S_2, le problème est, en général, possible, et un seul système de polynomes satisfait à la question.

Il peut arriver, dans des cas particuliers, qu'il n'existe pas de tels polynomes; mais nous laisserons de côté ces cas d'où naissent, comme on sait, de grandes difficultés. La méthode de calcul par les polynomes associés n'est pas alors applicable. Ils ne peuvent se présenter, d'ailleurs, que lorsque les coefficients des séries S_1 et S_2 satisfont à certaines relations; nous supposerons donc que ces coefficients demeurent arbitraires; à chaque couple de valeurs (μ_1, μ_2) correspond alors sûrement un couple de polynomes, et les degrés de ces polynomes sont effectivement égaux à μ_1 et μ_2.

Nous plaçons ces différents couples de polynomes dans les cases d'un Tableau à double entrée $T(x, y)$, dont les files parallèles au côté y correspondent à une même valeur de μ_1, et celles parallèles au côté x à une même valeur de μ_2. La *direction principale* du Tableau est la direction qui fait des angles égaux avec les côtés x et y. Les droites

perpendiculaires à cette direction, qui passent par les centres des cases, sont les *droites d'égale approximation;* si l'on numérote ces droites, dans l'ordre où elles se présentent, à partir de celle qui est la plus proche du sommet du Tableau, en donnant à celle-ci le numéro 0, à la suivante le numéro 1, etc., toutes les cases dont les centres sont sur la droite dont le numéro est k, correspondent à une même approximation, dont l'ordre est $k+1$.

2. Soient P et P′, Q et Q′, P_1 et P'_1 trois couples de polynomes placés dans des cases que j'appellerai A, B, C.

Si la disposition relative de ces trois cases est celle-ci :

Fig. 1.

on sait (*Thèse*, nº **62**) que l'on a

$$P\alpha + Q\beta = P_1,$$
$$P'\alpha + Q'\beta = P'_1,$$

α et β désignant deux constantes.

Si la disposition relative des trois cases est l'une ou l'autre de celles-ci :

Fig. 2.

Fig. 3.

des relations de même forme ont lieu, mais, dans le premier cas, α est un binome du premier degré à terme constant différent de zéro, et β une constante, tandis que, dans le second cas, α est une constante et β un binome du premier degré à terme constant différent de zéro.

Soit maintenant à calculer les polynomes X_1, X_2 de la case (μ_1, μ_2). Regardons cette case comme la case C de la *fig.* 1; alors, si l'on sup-

pose connus les polynomes qui sont dans les cases A et B, la détermination, qui, comme nous allons le montrer, est immédiate, des constantes α et β, nous donnera X_1 et X_2 en fonction de ces polynomes. Ainsi le calcul des polynomes de la case (μ_1, μ_2) se trouve dépendre de celui des polynomes des cases $(\mu_1, \mu_2 - 1)$, $(\mu_1 - 1, \mu_2)$.

Mais, si l'on suppose que la première de ces deux cases soit la case C de la *fig.* 2, et que la seconde soit la case C de la *fig.* 3, on voit que le calcul de leurs polynomes dépend à son tour du calcul des polynomes des deux cases $(\mu_1 - 1, \mu_2 - 2)$, $(\mu_1 - 2, \mu_2 - 1)$ qui ont exactement la même disposition relative.

Le calcul des polynomes de ces deux cases dépendra alors de même de celui des polynomes des cases $(\mu_1 - 2, \mu_2 - 3)$, $(\mu_1 - 3, \mu_2 - 2)$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'une des cases de l'un des couples successifs ainsi obtenus soit contiguë au bord du Tableau $T(x, y)$. On a ainsi la figure que voici :

Fig. 4.

	0			μ_1		
$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1$		A				
	B		A			
		B		A		
μ_2			B	C		

Partant donc des polynomes du premier couple de cases A, B, on calculera d'abord le binome α et la constante β qui donnent les polynomes de la case A du second couple A, B, et la constante α et le binome β qui donnent les polynomes de la case B de ce couple; on passera ensuite, par la même méthode, aux polynomes du troisième couple A, B, puis à ceux du quatrième, et ainsi de suite. Quand on aura obtenu les polynomes du dernier couple A, B, on déterminera les deux constantes α et β qui permettront enfin de calculer les polynomes X_1 et X_2 de la case C.

Telle est, pour le cas de deux séries, la méthode des polynomes associés de M. Hermite.

5. Nous avons dit que le calcul des éléments α, β, dans chaque cas.

était immédiat. Soit, par exemple, à passer des cases $(\mu_1, \mu_2 - 1)$, $(\mu_1 - 1, \mu_2)$ à la case (μ_1, μ_2). Les couples de polynomes étant P, P'; Q, Q' et X_1, X_2, on a

$$\begin{aligned} S_1 P + S_2 P' &= S'_1 x^{\mu_1+\mu_2}, \\ S_1 Q + S_2 Q' &= S'_2 x^{\mu_1+\mu_2}, \\ S_1 X_1 + S_2 X_2 &= \Sigma x^{\mu_1+\mu_2+1}, \end{aligned}$$

S'_1, S'_2 et Σ désignant des séries à terme constant différent de zéro. Dans ce cas, α et β sont des constantes, et l'on a

$$\begin{aligned} P\alpha + Q\beta &= X_1, \\ P'\alpha + Q'\beta &= X_2. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces relations par S_1, la seconde par S_2, et ajoutons membre à membre, on obtient simplement

$$S'_1 \alpha + S'_2 \beta = \Sigma x,$$

et le rapport des constantes α et β est déterminé par la condition que le terme en x fasse défaut dans le premier membre.

La même méthode est évidemment applicable aux autres cas.

4. Il nous reste à montrer comment se fait le calcul des polynomes des cases A, B qui forment le couple initial, le calcul du premier système de polynomes associés.

Si, pour fixer les idées, nous supposons $\mu_2 > \mu_1$, la case B est contiguë au côté y du Tableau $T(x, y)$ (*fig.* 4).

Posons $\mu_2 - \mu_1 = \nu_1$, en sorte que les polynomes à calculer, que nous désignerons par P_1, P'_1 et Q_1, Q'_1 soient respectivement de degrés 1, ν_1 et 0, $\nu_1 + 1$. Diminuons ces nombres d'une unité; on obtient 0, $\nu_1 - 1$ et -1, ν_1, et ceci montre que, si l'on savait déterminer, d'une part, une constante P et un polynome P' de degré $\nu_1 - 1$, satisfaisant à la condition

$$S_1 P + S_2 P' = S'_1 x^{\nu_1};$$

d'autre part, un polynome Q' de degré ν_1, tel que l'on eût

$$S_1 o + S_2 Q' = S'_2 x^{\nu_1},$$

les deux couples de polynomes P_1, P'_1 et Q_1, Q'_1 pourraient se déduire des deux couples P, P' et o, Q' par la loi qui permet de passer d'un système de polynomes associés au système suivant.

Or, la détermination des polynomes P, P' et Q' est immédiate. On aura P et P' en prenant arbitrairement la constante P, puis pour — P', les ν_1 premiers termes du développement en série de

$$\frac{S_1 P}{S_2};$$

quant à Q', ce sera un monome quelconque de degré ν_1.

Cette méthode est, au fond, celle que M. Hermite emploie à la page 296 de son Mémoire, où m désigne ce que nous avons appelé ν_1.

5. Le couple de polynomes P, P' que nous venons de déterminer figure dans le Tableau $T(x, y)$, mais le couple o, Q' n'y figure évidemment pas. Ce qui précède conduit à regarder notre Tableau à double entrée $T(x, y)$ comme limité par deux Tableaux à simple entrée $T(x)$ et $T(y)$. Le Tableau $T(x)$ est constitué par les polynomes P qui satisfont à la relation

$$S_1 P = S'_1 x^{\mu_1},$$

où μ_1 prend successivement les valeurs o, 1, 2, ... Ces polynomes ne sont autres que des monomes de degrés o, 1, 2, ... Ces monomes successifs doivent être regardés comme écrits sur les divisions successives du côté x de $T(x, y)$. Le Tableau $T(y)$ est le Tableau analogue à $T(x)$, mais relatif à la série S_2; les monomes qui le composent sont placés sur les divisions du côté y de $T(x, y)$.

Avec cette extension du Tableau $T(x, y)$, le couple o, Q' y figure maintenant, car on peut évidemment regarder comme formant ce couple, le monome qui figure dans la division de $T(y)$ qui correspond au nombre ν_1. On voit alors que la case où figurent P et P', et cette division constituent en quelque sorte un nouveau couple de cases A, B

qui peut être pris comme le couple initial de ceux qui conduisent à la case (μ_1, μ_2).

II. — Cas de trois séries.

6. Nous nous proposons d'étendre, maintenant, au cas de trois séries la méthode que nous venons d'étudier dans le cas de deux séries seulement. Il s'agit alors de déterminer les trois polynomes X_1, X_2, X_3, de degrés μ_1, μ_2, μ_3, qui satisfont à l'équation

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 = S x^{\mu_1+\mu_2+\mu_3+2},$$

condition qui les détermine, en général, complètement.

Nous disposerons donc, d'abord, ces systèmes de trois polynomes dans les cases d'un Tableau à triple entrée $T(x, y, z)$, dont les tranches parallèles au plan yz correspondront à une même valeur de μ_1, celles parallèles au plan zx à une même valeur de μ_2; celles, enfin, parallèles au plan xy, à une même valeur de μ_3.

La direction qui fait des angles égaux avec les trois arêtes du Tableau est la *direction principale*. Toutes les cases qui correspondent à une même approximation ont leurs centres placés dans un même plan P perpendiculaire à la direction principale; et si l'on numérote ces plans, en donnant à celui qui est le plus près du sommet du Tableau le n° 0, au suivant le n° 1, au suivant le n° 2, etc., le plan dont le numéro est k contient tous les systèmes de trois polynomes dont la somme des degrés est k, et correspond, par suite, à l'approximation d'ordre $k+2$. Ces plans P sont les *plans d'égale approximation*.

7. Considérons les trois cases

$$(m, \quad m'-1, m''-1),$$
$$(m-1, m', \quad m''-1),$$
$$(m-1, m'-1, m''),$$

qui sont placées dans un même plan P, dont chacune est contiguë

aux deux autres, et qui sont, toutes trois, contiguës à la case

$$(m, m', m'') \text{ (}^{1}\text{)}.$$

Nous les appellerons, dans l'ordre où nous les avons placées, A, B, C. Elles vont jouer le rôle des couples de cases A, B considérées dans le cas de deux séries.

Soient

$$\begin{array}{ccc} P, & P', & P'', \\ Q, & Q', & Q'', \\ R, & R', & R'' \end{array}$$

les systèmes de trois polynomes qui figurent respectivement dans les cases considérées. Nous allons d'abord montrer comment ils peuvent servir au calcul des polynomes X_1, X_2, X_3, qui figurent dans la case (m, m', m'').

On a d'abord les relations

$$\begin{aligned} S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' &= S'_1 x^{m+m'+m''}, \\ S_1 Q + S_2 Q' + S_3 Q'' &= S'_2 x^{m+m'+m''}, \\ S_1 R + S_2 R' + S_3 R'' &= S'_3 x^{m+m'+m''}, \\ S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3 &= \Sigma x^{m+m'+m''+2}. \end{aligned}$$

Par analogie avec le cas précédemment examiné, nous poserons

$$\begin{aligned} P\alpha + Q\beta + R\gamma &= X_1, \\ P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma &= X_2, \\ P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma &= X_3; \end{aligned}$$

(1) Il existe un second système de trois cases qui jouit de toutes les propriétés énoncées; c'est le système

$$\begin{array}{lll} (m-1, & m', & m''), \\ (m, & m'-1, & m''), \\ (m, & m', & m''-1). \end{array}$$

Il pourrait servir tout aussi bien que celui que nous adoptons pour développer les considérations qui vont suivre; mais, comme notre but n'est actuellement que de retrouver les résultats de M. Hermite, nous nous limitons au seul système indiqué.

multiplions ces équations respectivement par S_1, S_2, S_3 et ajoutons membre à membre, on obtient la nouvelle équation

$$S'_1\alpha + S'_2\beta + S'_3\gamma = \Sigma x^2.$$

On déterminera les trois nombres α, β, γ par la condition que, dans le premier membre, ne figure pas de terme constant ni de terme du premier degré en x; alors X_1, X_2, X_3 seront bien les polynomes de degrés m, m', m'' cherchés.

On voit que, si nous désignions par D la case où figurent ces polynomes, et que si, pour figurer les relations linéaires qui lient les polynomes de quatre cases consécutives A, B, C, D, nous dressions des Tableaux comme nous l'avons fait dans le cas de deux séries (*Thèse*, n° **62**), ce sont les trois nombres o, o, o qu'il faudrait faire figurer, pour la disposition actuelle des quatre cases, dans la case D.

8. Maintenant, au lieu de supposer que la case D soit la case (m, m', m''), nous allons supposer qu'elle est successivement chacune des trois cases

$$\begin{array}{lll}(m+1, & m', & m''),\\ (m, & m'+1, & m''),\\ (m, & m' & m''+1),\end{array}$$

qui ne sont autres que les trois cases A, B, C que l'on a déplacées parallèlement à la direction principale, dans le sens qui les éloigne du sommet du Tableau $T(x, y, z)$, jusqu'à ce qu'elles soient venues coïncider avec les trois cases placées d'une façon analogue qui viennent après elles.

Soient

$$\begin{array}{lll}P_1, & P'_1, & P''_1,\\ Q_1, & Q'_1, & Q''_1,\\ R_1, & R'_1, & R''_1\end{array}$$

les systèmes de trois polynomes qui figurent dans ces nouvelles cases. Occupons-nous d'abord du premier.

Nous poserons

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = P_1,$$
$$P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma = P'_1,$$
$$P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma = P''_1,$$

et, si l'on tient compte de l'approximation donnée par les polynomes des cases A, B, C, D, qui, pour cette dernière, s'exprime par la relation

$$S_1 P_1 + S_2 P'_1 + S_3 P''_1 = \Sigma_1 x^{m+m'+m''+3},$$

on en conclut l'équation

$$S'_1 \alpha + S'_2 \beta + S'_3 \gamma = \Sigma_1 x^3.$$

Les quantités α, β, γ doivent être déterminées de telle sorte que le terme constant et les termes du premier et du second degré disparaissent dans le premier membre, et que, en outre, P_1, P'_1, P''_1 aient pour degrés les nombres $m+1$, m', m''. Or, pour cela, il suffit que α soit un binome du premier degré et β et γ des constantes, car on a ainsi les quatre constantes nécessaires, et P_1, P'_1, P''_1 ont bien les degrés voulus. Ce sont ainsi les nombres 1, 0, 0 qui devraient être placés, pour la disposition actuelle des cases A, B, C, D, dans cette dernière.

Par analogie, on peut conclure que, si la case D est la seconde ou la troisième des cases considérées, les nombres à adopter sont 0, 1, 0, dans le premier cas, 0, 0, 1 dans le second.

9. Les trois systèmes de polynomes des cases A, B, C sont les polynomes que M. Hermite nomme les polynomes associés d'ordre m, m', m'', et la méthode de calcul que nous venons d'obtenir est celle que fait connaître l'éminent géomètre pour passer de ce système de polynomes associés à celui d'ordre $m+1$, $m'+1$, $m''+1$.

Il est dès lors aisé de voir comment on pourra calculer les polynomes X_1, X_2, X_3 de la case (μ_1, μ_2, μ_3). Ce calcul dépend, comme nous l'avons vu, de celui des polynomes associés d'ordre μ_1, μ_2, μ_3; celui-ci, du calcul des polynomes associés d'ordre $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$,

$\mu_3 - 1$; ce dernier, du calcul des polynomes associés d'ordre immédiatement inférieur, et ainsi de suite. Ceci revient à des déplacements successifs de l'ensemble des cases A, B, C parallèlement à la direction principale, dans le sens qui rapproche du sommet du Tableau $T(x, y, z)$, de façon que cet ensemble vienne coïncider successivement avec tous ceux qui, placés avant lui, ont la même disposition. On peut continuer ces déplacements jusqu'à ce que l'une des cases vienne à être contiguë à l'une des faces du Tableau; une seconde des trois cases est d'ailleurs alors contiguë également à la même face ([1]).

10. Supposons, pour fixer les idées, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$; alors, c'est à la face yz que les deux cases deviennent contiguës, et l'on est ramené au calcul des polynomes associés d'ordre

$$1, \qquad \mu_2 - \mu_1 + 1, \qquad \mu_3 - \mu_1 + 1,$$

ou, en posant $\mu_2 - \mu_1 = \nu_1$, $\mu_3 - \mu_1 = \nu_2$, au calcul des trois systèmes de polynomes de degrés

$$\begin{matrix} 1, & \nu_1, & \nu_2, \\ 0, & \nu_1 + 1, & \nu_2, \\ 0, & \nu_1, & \nu_2 + 1. \end{matrix}$$

Diminuons ces degrés d'une unité; on obtient les nombres

$$\begin{matrix} 0, & \nu_1 - 1, & \nu_2 - 1, \\ -1, & \nu_1, & \nu_2 - 1, \\ -1, & \nu_1 - 1, & \nu_2, \end{matrix}$$

et l'on voit que, si l'on connaissait trois systèmes de polynomes composés, le premier, d'une constante P, d'un polynome P′ de degré

([1]) Ce dernier fait ne se présenterait pas, si l'on faisait usage du système de trois cases indiqué dans la Note précédente (n° 7), et le mode de calcul qui va être employé maintenant devrait être remplacé par un autre qu'il serait facile, mais qu'il est sans intérêt d'imaginer.

$\nu_1 - 1$ et d'un polynome P″ de degré $\nu_2 - 1$, tels que

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{\nu_1+\nu_2};$$

le second, d'un polynome Q′ de degré ν_1 et d'un polynome Q″ de degré $\nu_2 - 1$, tels que

$$S_1 o + S_2 Q' + S_3 Q'' = S'_2 x^{\nu_1+\nu_2},$$

le troisième, d'un polynome R′ de degré $\nu_1 - 1$ et d'un polynome R″ de degré ν_2, tels que

$$S_1 o + S_2 R' + S_3 R'' = S'_3 x^{\nu_1+\nu_2},$$

le système

$$\begin{matrix} P, & P', & P'', \\ o, & Q', & Q'', \\ o, & R', & R'' \end{matrix}$$

pourrait être regardé comme un système de polynomes associés, et servir de point de départ au calcul.

Or, les polynomes Q′ et Q″, ainsi que les polynomes R′ et R″ peuvent être regardés comme connus, car ce sont des couples de polynomes approchés se rapportant au cas de deux séries S_2 et S_3 seulement. Il ne reste qu'à montrer comment s'obtiennent les polynomes P, P′, P″ de degrés o, $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1$.

11. Voici l'interprétation de la méthode suivie par M. Hermite.

Nous regardons la face yz du Tableau $T(x, y, z)$, avec les divisions qu'y figurent les faces des cases contiguës, comme un Tableau à double entrée $T(y, z)$, où nous faisons figurer les couples de polynomes qui donnent l'approximation maximum pour les deux séries S_2 et S_3.

Posons $\nu_1 - 1 = \rho_1$, $\nu_2 - 1 = \rho_2$. Nous considérons la case de $T(x, y, z)$, qui correspond aux nombres o, ρ_1, $\rho_2 - 1$, et la case de $T(y, z)$, qui correspond aux nombres ρ_1 et ρ_2. Soient P, P′, P″ les polynomes qui figurent dans la première, Q′, Q″ ceux qui figurent dans la seconde; au moyen de ces polynomes se calculent aisément ceux de la case (o, ρ_1, ρ_2) que nous désignerons par P_1, P'_1, P''_1.

On a les relations

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{\rho_1+\rho_2+1},$$
$$S_2 Q' + S_3 Q'' = S'_2 x^{\rho_1+\rho_2+1};$$

multiplions la seconde par α, et ajoutons membre à membre, on obtient

$$S_1 P + S_2(P' + \alpha Q') + S_3(P'' + \alpha Q'') = (S'_1 + \alpha S'_2) x^{\rho_1+\rho_2+1}.$$

Si l'on détermine le nombre α de façon à faire disparaître le terme indépendant de x dans $S'_1 + \alpha S'_2$, l'égalité devient

$$S_1 P_1 + S_2 P'_1 + S_3 P''_1 = \Sigma x^{\rho_1+\rho_2+1},$$

P_1 étant de degré o, P'_1 de degré ρ_1 et P''_1 de degré ρ_2, en sorte que ce sont les polynomes cherchés.

Ainsi, le calcul de ces polynomes dépend de ceux qui correspondent à la case $(0, \rho_1, \rho_2 - 1)$; le calcul de ceux-ci se ramène de même à celui des polynomes de la case $(0, \rho_1, \rho_2 - 2)$, et ainsi de suite; on arrive enfin aux polynomes de la case $(0, \rho_1, 0)$.

Ceux-ci pourraient s'obtenir immédiatement, car, en les désignant par P, P', P'', on doit avoir

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{\rho_1+2};$$

on déterminerait les constantes P et P'' par la condition que le développement en série entière de

$$\frac{S_1 P + S_3 P''}{S_2}$$

ne contînt pas de terme en x^{ρ_1+1} et $-P'$ serait alors le polynome de degré ρ_1 formé par les termes précédents du développement. Cette marche serait analogue à celle suivie dans le cas de deux séries (n° 4), mais M. Hermite fait encore dépendre le calcul de ces polynomes de ceux que, par analogie avec ce qui précède, nous placerions dans le

Tableau à double entrée $T(x, y)$ constitué par la face xy du Tableau $T(x, y, z)$, et relatif aux deux fonctions S_1 et S_2.

Désignant par P_1, P'_1, P''_1 les polynomes à calculer de la case $(0, \rho_1, 0)$, par (P, P') ceux de la case $(0, \rho_1)$ dans $T(x, y)$, par Q', Q'' ceux de la case $(\rho_1, 0)$ dans $T(y, z)$, on a

$$S_1 P + S_2 P' = S'_1 x^{\rho_1+1},$$
$$S_2 Q' + S_3 Q'' = S'_2 x^{\rho_1+1},$$

d'où

$$S_1 P + S_2(P' + \alpha Q') + S_3 \alpha Q'' = (S'_1 + \alpha S'_2) x^{\rho_1+1}.$$

Il suffit de déterminer la constante α de telle sorte que le terme indépendant de x dans $S'_1 + \alpha S'_2$ soit nul, pour que les multiplicateurs de S_1, S_2 et S_3 dans le premier membre deviennent les polynomes demandés P_1, P'_1, P''_1.

En définitive, la méthode employée pour parvenir aux polynomes de la case $(0, \rho_1, \rho_2)$ consiste à calculer de proche en proche, et en se servant des couples de polynomes qui figurent dans les Tableaux à double entrée $T(x, y)$, $T(y, z)$, les systèmes de polynomes de toute la file de cases placée perpendiculairement au plan xy, partant de ce plan et aboutissant à la case considérée. On aperçoit ainsi bien clairement ce qu'il y a d'arbitraire dans cette marche, comme cela va ressortir avec plus d'évidence encore de la seconde Partie de ce Travail.

SECONDE PARTIE.

EXTENSION, AU CAS DE TROIS SÉRIES, DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES SIMPLES.

---

12. Les deux lois particulières de récurrence, qui, dans le cas de deux séries, donnent naissance à la méthode de calcul par les poly-

nomes associés, ne sont pas de celles qui s'offrent dans la théorie des fractions continues simples; elles se présentent seulement quand on généralise la définition de ces fractions, en acceptant que le monome des numérateurs partiels puisse être de degré zéro. J'ai montré (*Thèse*, n° **61**) combien cette légère extension de la définition donnait de complication aux résultats, si simples dans le cas de Tableaux uniquement composés de fractions normales, qui se présentent dans la théorie des fractions continues simples.

Il est bien naturel de penser que cette même complication se retrouve quand on passe au cas de trois séries. Aussi, laissant de côté la voie qui conduirait à chercher l'extension, à ce cas, de la théorie des fractions continues simples *généralisées*, où nous retrouverions, parmi d'autres, les trois lois particulières de récurrence sur lesquelles se fonde le calcul par les polynomes associés, allons-nous poursuivre la seule extension de la théorie des fractions continues simples *elles-mêmes*.

I. — Les algorithmes généraux.

13. Nous considérons trois systèmes de polynomes

$$\begin{matrix} P, & P', & P'', \\ Q, & Q', & Q'', \\ R, & R', & R'', \end{matrix}$$

correspondant aux cases (p, p', p''), (q, q', q''), (r, r', r''), et nous nous proposons d'abord d'évaluer les degrés extrêmes du déterminant (*Thèse*, n° **51**) Δ formé par ces polynomes.

Des relations

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{p+p'+p''+2},$$

$$S_1 Q + S_2 Q' + S_3 Q'' = S'_2 x^{q+q'+q''+2},$$

$$S_1 R + S_2 R' + S_3 R'' = S'_3 x^{r+r'+r''+2},$$

on déduit

$$\Delta = \frac{\begin{vmatrix} S'_1 x^{p+p'+p''+2} & P' & P'' \\ S'_2 x^{q+q'+q''+2} & Q' & Q'' \\ S'_3 x^{r+r'+r''+2} & R' & R'' \end{vmatrix}}{S_1},$$

et l'on en conclut que le degré du terme de moindre degré dans Δ est égal au plus petit des trois nombres

$$p+p'+p''+2, \quad q+q'+q''+2, \quad r+r'+r''+2.$$

Si, dans Δ, on remplace chaque polynome par son degré, on obtient le déterminant

$$\begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{vmatrix};$$

le degré le plus élevé dans Δ sera la somme la plus élevée obtenue en faisant la somme des facteurs dans chaque terme du développement de ce déterminant.

14. Cherchons, par exemple, les degrés des facteurs α, β, γ des formules de récurrence

$$\begin{aligned} P\alpha + Q\beta + R\gamma &= P_1, \\ P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma &= P'_1, \\ P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma &= P''_1, \end{aligned}$$

en supposant que l'on ait affaire aux quatre cases placées suivant la direction principale,

$$(m,\, m',\, m''); \quad (m+1,\, m'+1,\, m''+1);$$
$$(m+2,\, m'+2,\, m''+2); \quad (m+3,\, m'+3,\, m''+3).$$

Les degrés extrêmes de Δ sont

$$m+m'+m''+2 \quad \text{et} \quad m+m'+m''+3;$$

il se réduit donc à un binome.

Si l'on évalue de même les degrés extrêmes des numérateurs de α, β, γ, on trouve

$$m+m'+m''+5 \quad \text{et} \quad m+m'+m''+6,$$

pour le numérateur de α;

$$m + m' + m'' + 2 \quad \text{et} \quad m + m' + m'' + 5,$$

pour le numérateur de β;

$$m + m' + m'' + 2 \quad \text{et} \quad m + m' + m'' + 4,$$

pour le numérateur de γ.

Donc, α, β, γ sont de la forme [1]

$$\alpha = \frac{(a + a'x)\,x^3}{d + d'x},$$
$$\beta = \frac{b + b'x + b''x^2 + b'''x^3}{d + d'x},$$
$$\gamma = \frac{c + c'x + c''x^2}{d + d'x}.$$

15. Revenons au cas général, et proposons-nous de constituer avec des cases du tableau $T(x, y, z)$ une suite telle que les polynomes de ces cases donnent lieu à des lois de récurrence analogues à celles qu'offrent les termes des réduites successives d'une fraction continue simple. Si l'on désigne, comme dans l'exemple précédent, par α, β, γ les coefficients des formules de récurrence, α devra être (*Thèse*, n° **42**) un monome dont le coefficient et le degré soient différents de

---

(1) M. Hermite a, depuis longtemps, reconnu l'existence de ce diviseur du premier degré $d + d'x$, dans le cas qui nous occupe. Les expressions précédentes de α, β, γ m'ont été communiquées par lui, sans démonstration, dans une lettre datée de Paris, le 13 janvier 1892, et où l'illustre géomètre suppose, toutefois, que les degrés m, m', m'' sont égaux.

Il n'est pas sans intérêt d'ajouter que c'est la présence de ce diviseur du premier degré qui l'a fait renoncer à s'engager dans une voie si différente de celle des fractions continues, et l'a conduit à exposer, *comme rétablissant l'analogie perdue*, la méthode de calcul par les polynomes associés, rencontrée, d'autre part, dans des questions de Calcul intégral. Les résultats de notre travail montreront que nous ne nous rendons pas à cette dernière opinion de l'illustre maître.

zéro, β et γ devront être des polynomes dont le terme constant soit différent de zéro.

Soient

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad K, \quad L, \quad M, \quad N, \quad \ldots$$

une telle suite, et

$$(a_1, a_2, a_3); \quad (b_1, b_2, b_3); \quad \ldots;$$
$$(k_1, k_2, k_3); \quad (l_1, l_2, l_3); \quad (m_1, m_2, m_3); \quad (n_1, n_2, n_3); \quad \ldots$$

les systèmes de degrés correspondants.

Pour que les coefficients des formules de récurrence soient entiers, il faut d'abord que le déterminant Δ relatif à trois cases consécutives quelconques soit un monome.

En second lieu, Δ étant un monome, et α devant être également un monome *dont le degré soit au moins égal à l'unité*, la moins avancée des trois cases consécutives K, L, M, doit être moins avancée que la moins avancée des trois cases consécutives suivantes, L, M, N; le degré d'avancement d'une case dans le tableau $T(x, y, z)$ étant caractérisé par le numéro du plan d'égale approximation qui la contient. Il faut pour cela que la case K soit moins avancée que chacune des cases L, M, N, et cette condition suffit. On voit d'ailleurs immédiatement qu'alors β et γ sont nécessairement des polynomes à termes constants différents de zéro, et l'on arrive à cette conclusion :

Les lois de récurrence qui rattachent les uns aux autres les polynomes d'une suite de cases du Tableau $T(x, y, z)$ seront celles qui généralisent la loi de formation des réduites d'une fraction continue simple, si cette suite est composée avec des cases de plus en plus avancées dans le Tableau $T(x, y, z)$, et si le déterminant Δ formé par les polynomes de trois cases consécutives quelconques se réduit à un monome.

16. On devra donc avoir

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &< b_1 + b_2 + b_3 < \ldots \\ &< k_1 + k_2 + k_3 < l_1 + l_2 + l_3 \\ &< m_1 + m_2 + m_3 < n_1 + n_2 + n_3 < \ldots, \end{aligned}$$

et, dans chaque déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix},$$

la somme des facteurs d'un terme quelconque ne devra pas surpasser la somme des éléments de la première ligne augmentée de 2.

Si l'on pose

$$l_1 - k_1 = \lambda_1, \qquad m_1 - k_1 = \mu_1,$$
$$l_2 - k_2 = \lambda_2, \qquad m_2 - k_2 = \mu_2,$$
$$l_3 - k_3 = \lambda_3, \qquad m_3 - k_3 = \mu_3,$$

les six nombres entiers positifs, négatifs ou nuls $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, devront satisfaire aux inégalités suivantes

$$0 < \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$
$$\lambda_2 + \mu_3 \leq 2, \qquad \lambda_3 + \mu_1 \leq 2, \qquad \lambda_1 + \mu_2 \leq 2,$$
$$\lambda_3 + \mu_2 \leq 2, \qquad \lambda_1 + \mu_3 \leq 2, \qquad \lambda_2 + \mu_1 \leq 2.$$

Ce système d'inégalités admet 51 solutions; mais il est évident que toutes ne sont pas nécessairement acceptables : les différences $\mu_1 - \lambda_1$, $\mu_2 - \lambda_2$, $\mu_3 - \lambda_3$, égales respectivement aux différences $m_1 - l_1$, $m_2 - l_2$, $m_3 - l_3$, jouent, en effet, relativement aux trois systèmes

$$(l_1, l_2, l_3), \quad (m_1, m_2, m_3), \quad (n_1, n_2, n_3),$$

le même rôle que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ relativement aux systèmes

$$(k_1, k_2, k_3), \quad (l_1, l_2, l_3), \quad (m_1, m_2, m_3);$$

donc, parmi les solutions obtenues, il faut rejeter celles pour lesquelles les différences $\mu_1 - \lambda_1$, $\mu_2 - \lambda_2$, $\mu_3 - \lambda_3$ ne constituent pas un des groupes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui figurent dans les 51 solutions; pour ces solutions, les inégalités imposées sont bien vérifiées en ce qui concerne les cases K, L, M, mais elles ne peuvent plus l'être en ce qui concerne

les cases L, M, N; la suite ne peut pas être prolongée au delà de la case M.

En excluant ce cas, on est conduit à la suppression des six solutions

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 =$	−1	1	1	1	1	−1	1	−1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
$\mu_1, \mu_2, \mu_3 =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1

et il en reste quarante-cinq dont voici le Tableau :

I. $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

1° $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2$.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 =$	−1	1	1	1	1	−1	1	−1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
$\mu_1, \mu_2, \mu_3 =$	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
	1	−1	1	−1	1	1	1	1	−1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
	1	1	1	1	−1	1	−1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
	−1	0	2	0	2	−1	2	−1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
	0	0	2	0	2	0	2	0	0	−1	1	2	1	2	−1	2	−1	1
	0	−1	2	−1	2	0	2	0	−1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
	0	0	2	0	2	0	2	0	0	1	−1	2	−1	2	1	2	1	−1

0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	2	0	2	0	2	0	0

2° $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 3$.

0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	2	0	2	1	2	1	0

$$2. \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2.$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 3.$$

0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Prenons arbitrairement une de ces solutions, et soit

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \end{matrix}$$

celle que nous adoptons. Les différences

$$\beta_1 - \alpha_1 = \alpha'_1, \qquad \beta_2 - \alpha_2 = \alpha'_2, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = \alpha'_3$$

figurent une ou plusieurs fois parmi les systèmes de valeurs de λ_1, λ_2, λ_3; considérons une solution où il en soit ainsi, et soient β'_1, β'_2, β'_3 les valeurs de μ_1, μ_2, μ_3 dans cette solution. Du système

$$\begin{matrix} \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3, \\ \beta'_1, & \beta'_2, & \beta'_3, \end{matrix}$$

ainsi déduit du système initial, déduisons, par la même méthode, un troisième système

$$\begin{matrix} \alpha''_1, & \alpha''_2, & \alpha''_3, \\ \beta''_1, & \beta''_2, & \beta''_3, \end{matrix}$$

et continuons ainsi indéfiniment. Soit maintenant (a_1, a_2, a_3) une case quelconque du Tableau $T(x, y, z)$:

Pour la suite de cases

$$(a_1, a_2, a_3); \quad (a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, a_3 + \alpha_3);$$
$$(a_1 + \alpha_1 + \alpha'_1, a_2 + \alpha_2 + \alpha'_2, a_3 + \alpha_3 + \alpha'_3); \quad \ldots,$$

les lois de récurrence généralisent la loi de formation des réduites

d'une fraction continue simple; et réciproquement, toute suite de cases qui jouit de cette propriété est formée comme la suite précédente.

Ainsi se trouve étendu au cas de trois séries S_1, S_2, S_3 le théorème relatif à la multiplicité des fractions continues simples (*Thèse*, nos 52, 55).

17. Nous allons examiner maintenant quels sont les degrés des éléments α, β, γ des formules de récurrence relatives à quatre cases consécutives quelconques, K, L, M, N, de la suite précédente.

Le calcul du degré du monome α est immédiat; il est en effet égal à la différence des degrés des déterminants Δ relatifs aux systèmes de cases K, L, M et L, M, N, déterminants qui se réduisent l'un et l'autre à un monome; il est donc égal à

$$(l_1 + l_2 + l_3 + 2) - (k_1 + k_2 + k_3 + 2) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

c'est-à-dire, suivant le cas, soit à un soit à deux.

Le degré de β est la différence des degrés des déterminants Δ relatifs aux systèmes de cases K, L, M et K, M, N; celui de γ la différence analogue pour les systèmes de cases K, L, M et K, L, N. Ces différences ne changent pas si nous retranchons aux degrés des trois polynomes de K respectivement k_1, k_2, k_3, ce qui réduit ces degrés à zéro, et diminuons, en même temps, des mêmes quantités, les polynomes correspondants dans chacune des cases L, M, N. Ceci revient à remplacer les quatre cases K, L, M, N par quatre autres ayant la *même disposition relative,* dont la première soit au sommet du Tableau $T(x, y, z)$.

Ces dispositions relatives sont au nombre de 231, qui se déduisent de 77 d'entre elles par des permutations circulaires effectuées simultanément sur les trois nombres de chaque case, en sorte que, si

$$(0,\ 0,\ 0\ ),$$
$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3),$$
$$(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3),$$
$$(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$$

est l'une des dispositions relatives, les dispositions

$$\begin{array}{ll} (0, \; 0, \; 0), & (0, \; 0, \; 0), \\ (\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1), & (\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2), \\ (\mu_2, \mu_3, \mu_1), & (\mu_3, \mu_1, \mu_2), \\ (\nu_2, \nu_3, \nu_1), & (\nu_3, \nu_1, \nu_2) \end{array}$$

en sont deux autres : circonstance qui a son origine dans la symétrie *ternaire* du Tableau $T(x, y, z)$. Il est, en outre, évident que, pour les deux dernières dispositions, les degrés des éléments α, β, γ sont les mêmes respectivement que pour la première, et il suffit, par conséquent, pour évaluer ces degrés, de considérer seulement les 77 dispositions dont il vient d'être question.

Si l'on fait le calcul, on arrive à ce résultat très simple :

Les degrés des éléments α, β, γ *des formules de récurrence n'admettent que quatre systèmes de valeurs, à savoir*

$$(1, 0, 0); \quad (1, 1, 0); \quad (1, 1, 1); \quad (2, 1, 1).$$

18. Nous donnons ci-contre les 77 dispositions relatives considérées. Elles sont disposées en quatre groupes, toutes les dispositions d'un même groupe correspondant à un même système de valeurs des degrés de α, β, γ. Pour obtenir l'une des dispositions, il suffit de prendre $(0, 0, 0)$ dans la première colonne de l'un des groupes, puis $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; (μ_1, μ_2, μ_3); (ν_1, ν_2, ν_3), respectivement dans la deuxième, la troisième et la quatrième colonne du même groupe, en tenant compte de l'enchaînement figuré par les accolades.

Ces Tableaux sont, pour le cas de trois séries, les analogues de ceux que nous avons fait connaître, avec une autre disposition, dans le cas de deux séries (*Thèse*, n° 55).

Degrés de α, β, γ = 1, 0, 0; 1, 1, 0; 1, 1, 1; 2, 1, 1.

1, 0, 0

0 0 0	−1 1 1	0 1 1	1 1 1
	0 0 1	1 0 1	
		1 1 0	

1, 1, 0

0 0 0	0 0 1	−1 1 2	0 1 2
			1 0 2
			1 1 1
		0 0 2	0 1 2
			1 0 2
			1 1 1
			1 1 2
		0 1 1	0 1 2
			1 0 2
			1 1 2
		0 1 2	1 1 2
		1 −1 2	0 1 2
			1 0 2
			1 1 1
		1 0 1	0 1 2
			1 0 2
			1 2 1
		1 0 2	1 1 2
		1 1 0	0 1 2
			1 0 2
		1 1 1	1 1 2

1, 1, 1

0 0 0	−1 0 2	0 0 2	−1 1 3
			0 0 3
			0 1 2
			0 1 3
			1 −1 3
			1 0 2
			1 0 3
			1 1 1
			1 1 2
	−1 1 1	0 1 1	−1 2 2
			0 1 2
			0 2 1
			0 2 2
			1 0 2
			1 1 2
			1 2 0
			1 2 1
	−1 2 0	0 2 0	−1 3 1
			0 2 1
			0 3 0
			0 3 1
			1 1 1
			1 2 0
			1 2 1
			1 3 −1
			1 3 0
	0 0 1	0 0 2	−1 1 3
			0 0 3
			0 1 3
			1 −1 3
			1 0 3
		0 1 1	−1 2 2
			0 2 1
			0 2 2
			1 2 0
			1 2 1
		1 0 1	2 −1 2
			2 0 1
			2 0 2
			2 1 0
			2 1 1

2, 1, 1

0 0 0	0 1 1	1 1 1	0 2 2
			1 1 2
			1 2 1
			1 2 2
			2 0 2
			2 1 1
			2 1 2
			2 2 0
			2 2 1

II. — Les algorithmes réguliers.

19. Nous dirons que le calcul de proche en proche des polynomes d'une suite de cases, comme celles dont nous venons d'obtenir les lois de formation, est *régulier*, si le monome α et les polynomes β et γ conservent chacun le même degré, quel que soit le système de polynomes que l'on calcule au moyen des trois précédents.

Il résulte de cette définition que *quatre types d'algorithmes réguliers seulement sont possibles;* ils correspondraient respectivement aux quatre systèmes différents de valeurs des degrés de α, β, γ dont nous avons reconnu l'existence. Ils constituent la généralisation du calcul des réduites successives des fractions continues régulières (*Thèse*, n° **49**).

20. Cherchons d'abord si des algorithmes réguliers existent, pour lesquels les degrés de α, β, γ soient respectivement égaux à 2, 1, 1.

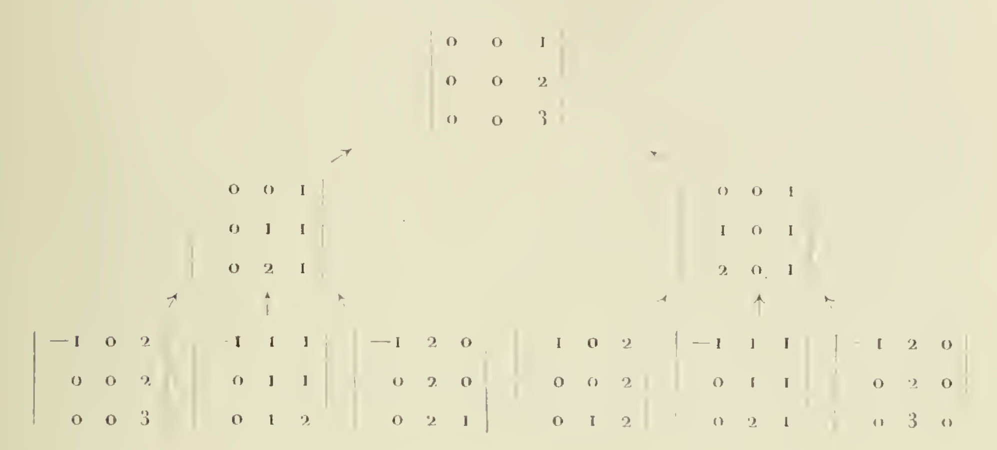
Pour qu'un tel algorithme puisse être obtenu, il faut et il suffit que l'on puisse former une suite de cases telle que quatre cases consécutives quelconques aient l'une des vingt-sept dispositions relatives pour lesquelles α, β et γ ont ces degrés. On voit immédiatement que cela est impossible, puisque, si quatre cases ont une telle disposition relative, la disposition de la troisième relativement à la seconde est caractérisée par les nombres 1, 0, 0 ou 0, 0, 1 ou enfin 0, 1, 0, ce qui n'a lieu dans aucune des vingt-sept dispositions considérées. Nous obtenons donc ce résultat négatif :

Il n'existe aucune suite de cases qui conduise à l'algorithme régulier dans lequel α serait un monome du second degré, et β et γ des binomes du premier degré.

21. Passons aux algorithmes où α, β, γ auraient les degrés 1, 1, 1.

Le nombre des dispositions relatives à considérer est alors beaucoup plus considérable et s'élève à 123; mais, par des considérations analogues à la précédente, on en exclut immédiatement un grand nombre,

et il n'en subsiste que 33, qui se déduisent, par des permutations circulaires, des onze suivantes, où nous avons omis d'écrire, dans chacune d'elles, la première ligne o, o, o.



Imaginons que l'on ait associé à chaque disposition les deux qui s'en déduisent par permutation. On voit alors immédiatement que chacune des trois dispositions de la première ligne donne naissance, par sa répétition, à des suites de cases auxquelles correspond l'algorithme régulier du type considéré. Ces suites constituent les files placées perpendiculairement aux trois faces du Tableau $T(x, y, z)$.

L'algorithme que nous considérons est exactement l'analogue de celui par lequel s'obtiennent les réduites successives de la fraction continue régulière de la première classe et du premier type, et la disposition de cases correspondante est aussi celle des réduites de cette fraction dans le Tableau à double entrée où elles sont figurées.

Si nous considérons maintenant l'une des six dispositions relatives de la seconde ligne du schéma précédent, nous trouvons qu'aucune ne peut s'enchaîner avec elle-même, mais que toutes s'enchaînent, comme l'indiquent les flèches, avec l'une des trois de la ligne précédente. On voit ainsi que chacune de ces dispositions ne peut se présenter qu'une fois au plus, dans le cours d'une suite donnant naissance à l'algorithme régulier, la disposition relative suivante étant alors nécessairement l'une des trois premières, qui ne s'enchaîne plus qu'avec elle-même.

Cette même circonstance se retrouve pour les dix-huit dispositions

de la dernière ligne; comme l'indiquent les flèches, elles ne s'enchaînent qu'avec les dispositions de la ligne précédente; par conséquent, elles ne peuvent se présenter qu'une seule fois dans la suite, et la seconde disposition relative qui vient après l'une d'elles est encore l'une de celles de la première ligne.

Il résulte clairement de ceci que, si l'on considère une suite de cases donnant l'algorithme régulier considéré, dès la troisième des dispositions relatives de quatre cases consécutives, on a sûrement l'une des dispositions de la première ligne, et cette disposition se reproduit ensuite indéfiniment. Nous sommes ainsi conduit à rejeter toutes les dispositions des deux dernières lignes qui ne sauraient donner naissance, par leur répétition, à l'algorithme régulier considéré, et ne peuvent se présenter chacune qu'une seule fois, en étant soit la première, soit la deuxième des dispositions relatives de la suite. Nous restons alors en présence des seules dispositions de la première ligne, et pouvons énoncer ce résultat :

Les seules suites de cases qui conduisent à l'algorithme régulier dans lequel α est un monome du premier degré, et β et γ sont des binomes du premier degré, sont les files de cases placées perpendiculairement aux trois faces du Tableau $\mathrm{T}(x, y, z)$.

Cet algorithme généralise celui de la formation des réduites des fractions continues régulières de la première classe et du premier type, réduites qui ont, dans le Tableau à double entrée où elles sont figurées, une disposition analogue à celle des cases dans le Tableau à triple entrée.

22. Nous arrivons aux algorithmes où α, β, γ ont pour degrés respectifs 1, 1, 0. Les considérations précédentes, très simplifiées, d'ailleurs, conduisent au schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}
\end{array}$$

Nous supposons toujours associées, à chaque disposition, celles qui s'en déduisent par permutation circulaire des colonnes.

Les six dispositions de la première ligne sont, comme l'indiquent les flèches, associées deux à deux, chaque disposition de l'un des trois couples s'enchaînant avec l'autre disposition du même couple. Chaque couple donne ainsi naissance à un algorithme régulier du type considéré.

Il est aisé de voir la disposition qu'affectent les cases d'une telle suite. Si l'on considère des cases toutes situées dans une même tranche parallèle au plan des yz, que, partant de l'une de ces cases, on passe à la contiguë suivant la face parallèle au plan zx et la plus éloignée de ce plan, que, de celle-ci, on passe à la contiguë suivant la face parallèle au plan xy et la plus éloignée de ce plan, puis, de nouveau, de celle-ci à la contiguë suivant la face parallèle au plan zx et la plus éloignée de ce plan, et ainsi de suite, on aura l'idée de l'une des dispositions considérées; c'est une sorte d'escalier, formé de degrés égaux, et dont la *direction générale* est parallèle à la direction principale du plan yz.

Les deux autres dispositions sont analogues à celle-ci, le plan yz est seulement remplacé par les plans zx et xy.

L'analogue de cet algorithme régulier n'existe pas dans le cas de deux séries seulement; il est, pour ainsi dire, intermédiaire entre les algorithmes qui correspondent aux fractions continues régulières qui, étant de la première classe, appartiennent au premier et au second type de cette classe.

Les mêmes raisons que nous avons déjà invoquées nous conduisent maintenant à rejeter les six dispositions de la dernière ligne de notre schéma, comme impropres à donner seules, par leur répétition, l'algorithme considéré, et comme ne pouvant figurer qu'une seule fois dans toute suite qui donne l'algorithme considéré, au début même de cette suite. Nous avons alors cette proposition :

Les seules suites de cases qui conduisent à l'algorithme régulier dans lequel α est un monome du premier degré, β un binome du premier degré, et γ une constante, sont les files en forme d'escalier dont la direction générale est parallèle à l'une des directions principales des faces du Tableau $\mathrm{T}(x, y, z)$.

Il n'existe pas, dans le cas de deux séries, d'algorithme analogue.

25. Il reste enfin à examiner les algorithmes où α, β, γ auraient respectivement pour degrés 1, 0, 0. Le schéma, analogue aux précédents, est ici simplement

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

La première disposition et les deux qui s'en déduisent par permutations circulaires des colonnes, forment un groupe tel que chacune des dispositions s'enchaîne avec l'une des deux autres, qui s'enchaîne avec la troisième, et celle-ci ramène la première, et ainsi de suite. Les choses se passent de même pour la seconde des dispositions précédentes. On a ainsi deux façons d'engendrer une suite donnant l'algorithme régulier considéré, et il est facile de se rendre compte de la disposition des cases. Partons d'une case; nous passons à la contiguë suivant la face parallèle au plan yz et la plus éloignée de ce plan; de celle-ci nous passons à la contiguë suivant la face parallèle au plan zx et la plus éloignée de ce plan; de celle-ci, à la contiguë suivant la face parallèle au plan xy et la plus éloignée de ce plan, et enfin, partant de cette dernière case, nous recommençons toute la série d'opérations, et ainsi de suite. On obtient, de la sorte, une file affectant une forme hélicoïdale dont la *direction générale* est parallèle à la direction principale du Tableau $T(x, y, z)$. Ce qui distingue les deux modes d'engendrer la suite, c'est le sens de rotation de l'hélice; avec l'un des modes, on s'éloigne du sommet du Tableau en tournant autour d'une parallèle à la direction principale, dans un certain sens; avec l'autre, on s'en éloigne en tournant dans l'autre sens.

Cet algorithme généralise le calcul des réduites des fractions continues régulières de la première classe et du second type; donc :

Les seules suites de cases qui conduisent à l'algorithme régulier dans lequel α est un monome du premier degré, et β et γ sont des constantes, sont les files de forme hélicoïdale dont la direction

générale est parallèle à la direction principale du Tableau à triple entrée.

Cet algorithme généralise le calcul des réduites des fractions continues régulières de la première classe et du second type, réduites qui ont, dans le Tableau à double entrée où elles sont figurées, une disposition analogue à celle des cases dans le Tableau à triple entrée.

24. Il résulte de toute cette étude que, des quatre algorithmes réguliers possibles, trois existent effectivement qui constituent, dans le cas de trois séries S_1, S_2, S_3, les méthodes de calcul analogues au calcul des réduites des fractions continues régulières de la première classe. On aura remarqué l'extrême simplicité de la disposition des suites de cases qui donnent naissance à chacun d'eux. Si l'on désigne par (x, y, z) les nombres qui définissent une case du Tableau $T(x, y, z)$, le premier algorithme s'obtient en laissant fixes deux des nombres x, y, z et en donnant au troisième des accroissements successifs égaux à l'unité; le deuxième, en laissant fixe l'un des nombres x, y, z et en donnant aux deux autres, alternativement, des accroissements égaux à l'unité; enfin, le troisième, en donnant, successivement, aux nombres x, y, z, pris toujours dans le même ordre, des accroissements égaux à l'unité.

III. — Le calcul du système X_1, X_2, X_3 de polynomes.

25. Nous nous proposons maintenant de montrer comment, en faisant usage des résultats obtenus, on peut calculer les polynomes X_1, X_2, X_3 qui figurent dans la case (μ_1, μ_2, μ_3).

Il suffit de se donner une suite de cases, A, B, ..., aboutissant à la case (μ_1, μ_2, μ_3), et de la nature de celles que nous avons étudiées (n° **16**). Si l'on suppose connus les trois premiers systèmes de polynomes, et que l'on veuille calculer les polynomes du système qui vient ensuite, on cherchera quelle est la disposition relative des quatre cases, et, alors, se reportant au Tableau précédemment donné de toutes les dispositions relatives, on y trouvera les degrés qu'ont, dans

le cas actuel, les éléments α, β, γ; un calcul facile donnera les coefficients de ces éléments, et l'on en déduira les polynomes demandés. On procédera ensuite, par la même méthode, au calcul des polynomes de la cinquième case, au moyen de ceux des trois précédentes, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive aux polynomes X_1, X_2, X_3.

Le calcul dépend, comme l'on voit, d'abord, de la connaissance des trois premiers systèmes de polynomes, et, en second lieu, du calcul des coefficients des éléments α, β, γ pour chacun des systèmes suivants. Occupons-nous d'abord de ce second point.

26. Un exemple fera comprendre immédiatement la marche à suivre.

Soient les quatre cases

$$(m, m', m''); \quad (m, m', m''+1);$$
$$(m+1, m'-1, m''+2); \quad (m+1, m'+1, m''+1),$$

et désignons par

$$P,\ P',\ P''; \quad Q,\ Q',\ Q''; \quad R,\ R',\ R''; \quad P_1,\ P'_1,\ P''_1$$

les quatre systèmes correspondants de polynomes. Nous supposons connus les trois premiers de ces systèmes, et nous nous proposons d'obtenir le dernier.

La disposition relative de ces quatre cases, caractérisée par les nombres

$$0,\ 0,\ 0; \quad 0,\ 0,\ 1; \quad 1,\ -1,\ 2; \quad 1,\ 1,\ 1,$$

est une de celles pour lesquelles les degrés des éléments α, β, γ sont égaux respectivement à 1, 1 et 0. Nous avons donc quatre coefficients dont il faut déterminer les rapports.

On a d'abord les relations

$$S_1 P + S_2 P' + S_3 P'' = S'_1 x^{m+m'+m''+2},$$
$$S_1 Q + S_2 Q' + S_3 Q'' = S'_2 x^{m+m'+m''+3},$$
$$S_1 R + S_2 R' + S_3 R'' = S'_3 x^{m+m'+m''+4},$$

qui déterminent les séries S'_1, S'_2, S'_3, puis

$$S_1 P_1 + S_2 P'_1 + S_3 P_1 = \Sigma x^{m+m'+m''+5},$$

et enfin

$$\begin{aligned} P\alpha + Q\beta + R\gamma &= P_1, \\ P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma &= P'_1, \\ P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma &= P'_1. \end{aligned}$$

Multiplions celles-ci, respectivement, par S_1, S_2, S_3 et ajoutons; on obtient, en vertu des précédentes,

$$\alpha S'_1 + \beta S'_2 x + \gamma S'_3 x^2 = \Sigma x^3.$$

Le premier membre ne renferme pas de terme constant; il faut encore, d'après cette relation même, qu'il n'ait pas de terme du premier, ni de terme du second degré, conditions qui donnent déjà deux équations linéaires entre les coefficients de α, β, γ; et nous remarquerons que, pour écrire ces équations, il suffit de connaître les deux premiers termes au plus de chacune des séries S'_1, S'_2, S'_3.

La troisième équation résulte de l'examen des degrés des polynomes P_1, P'_1, P''_1. On voit immédiatement que P_1 et P_1 ont, dès maintenant, pour degrés respectifs $m+1$ et $m'+1$; mais, β étant du premier degré et γ étant une constante, les produits $Q''\beta$ et $R''\gamma$ sont, l'un et l'autre, de degré $m''+2$, tandis que P''_1 ne doit être que de degré $m''+1$. On aura la troisième équation en égalant à zéro le coefficient de $x^{m''+2}$ dans $Q''\beta + R''\gamma$.

Les éléments α, β, γ se trouvant ainsi déterminés à un même facteur constant près, on en déduit immédiatement les polynomes P_1, P'_1, P''_1.

La même méthode de calcul s'applique dans tous les cas.

27. Il est à peine besoin de faire remarquer que le calcul des systèmes successifs d'éléments α, β, γ aura sa plus grande simplicité dans le cas où la suite de cases est une de celles qui donnent naissance à l'un des trois algorithmes réguliers. On sait alors, une fois pour toutes, le nombre des termes des séries S'_1, S'_2, S'_3 que l'on doit calculer, et,

si l'on observe que la série que nous avons appelée Σ n'est autre que la série S'_3 pour le système d'éléments α, β, γ qui vient après celui que l'on calcule, on voit que l'on pourra, en même temps que l'on égale à zéro les coefficients qui doivent être annulés dans l'équation où figure cette série, mettre, chaque fois, en évidence ceux aussi qui doivent servir au calcul suivant.

De cette façon, les calculs pourront être exécutés d'une manière en quelque sorte mécanique, et il serait facile d'énoncer la règle qui en fixe la marche pour chacun des trois algorithmes réguliers; nous ne nous y arrêterons pas.

28. Nous arrivons maintenant à la détermination des trois systèmes de polynomes qui servent de point de départ au calcul.

Nous observerons d'abord qu'il est des systèmes de polynomes du Tableau $T(x, y, z)$ qui s'obtiennent directement sans difficultés. Outre les constantes de la case $(0, 0, 0)$ et les polynomes simples des cases très voisines de celle-là, on peut calculer fort aisément les polynomes de toute case contiguë à deux faces du Tableau; c'est ce que nous avons déjà établi antérieurement (n° **11**) et sur quoi nous ne reviendrons pas. Nous remarquerons seulement que la même méthode directe sera encore le plus souvent praticable quand l'un des polynomes est une constante et un second un binome du premier degré, le troisième étant de degré quelconque.

Quoi qu'il en soit, il suffit de prendre pour cases initiales de la suite trois cases parmi celles dont on peut ainsi calculer facilement les polynomes. Nous signalerons, par exemple, la suite, toujours possible,

$$(0, 0, 0);\quad (0, 0, 1);\quad (0, 0, 2);\quad \ldots;$$
$$(0, 0, \mu_3);\quad (0, 1, \mu_3);\quad (0, 2, \mu_3);\quad \ldots;$$
$$(0, \mu_2, \mu_3);\quad (1, \mu_2, \mu_3);\quad \ldots;\quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

composée de trois tronçons donnant un même algorithme régulier, rattachés simplement l'un à l'autre; on pourrait même la faire commencer par la case $(0, 0, \mu_3 - 2)$, puisque, d'après ce qui précède, les polynomes des trois premières cases sont alors directement calculables.

29. Enfin, nous indiquerons encore brièvement comment le Tableau $T(x, y, z)$ peut être *prolongé* au moyen de trois Tableaux à double entrée $T(y, z)$, $T(z, x)$, $T(x, y)$.

Ces Tableaux sont relatifs respectivement aux couples de séries S_2 et S_3, S_3 et S_1, S_1 et S_2. Le Tableau $T(y, z)$ sera regardé comme formé par la face yz de $T(x, y, z)$; sur cette face les cases du Tableau à triple entrée dessinent des carrés, et c'est dans ces carrés que nous supposerons placés les couples de polynomes approchés pour les deux séries S_2 et S_3, il constitue une sorte de tranche annexée qui correspondrait à la valeur -1 de x. De même $T(z, x)$ et $T(x, y)$ sont constitués par les faces zx et xy de $T(x, y, z)$. Voici comment ces Tableaux annexés peuvent intervenir dans le calcul.

Soient

$$(m, m', m''); \quad (m+\lambda_1, m'+\lambda_2, m''+\lambda_3);$$
$$(m+\mu_1, m'+\mu_2, m''+\mu_3); \quad (m+\nu_1, m'+\nu_2, m''+\nu_3)$$

quatre cases du Tableau $T(x, y, z)$, offrant l'une des dispositions relatives antérieurement obtenues, et supposons que nous fassions le calcul des éléments α, β, γ des formules de récurrence qui donnent les polynomes de la dernière case au moyen de ceux des trois premières. La détermination de ces éléments se fera en égalant à zéro les coefficients de certaines puissances de x, de façon à exprimer que les polynomes cherchés donnent bien l'ordre voulu d'approximation, et que leurs degrés ne dépassent pas respectivement les nombres $m+\nu_1$, $m'+\nu_2$, $m''+\nu_3$.

Supposons maintenant que l'on donne à l'un des nombres m, m', m'', à m, par exemple, des valeurs décroissantes; les quatre cases conservant la même disposition relative, le calcul des éléments α, β, γ, qui ne dépend que de celle-ci, se fera toujours de la même manière. Mais il arrivera que l'un au moins des quatre nombres m, $m+\lambda_1$, $m+\mu_1$, $m+\nu_1$ devienne égal à -1. Supposons que ce ne soit pas le dernier. Alors la quatrième case est toujours une case du Tableau $T(x, y, z)$, et cependant le calcul de ses polynomes ne peut plus être effectué au moyen de ceux des cases précédentes, car l'une au moins de ces cases n'appartient plus au Tableau. Toutefois, elles appartiennent encore toutes au Tableau *prolongé;* et, en effet, si

nous regardons le polynome qui correspond au degré -1 introduit, comme identiquement nul, et les deux autres polynomes du même système comme le couple de polynomes de $T(y, z)$ qui correspond à leurs degrés, on peut s'assurer que le calcul des éléments α, β, γ peut encore être fait comme précédemment, à la condition, toutefois, que les trois nombres m, $m + \lambda_1$, $m + \mu_1$ ne soient pas devenus simultanément égaux à -1. Le système d'égalités sur lesquelles repose le calcul subsiste alors avec toutes les propriétés qui ont été invoquées pour justifier cette méthode de détermination des coefficients de α, β, γ.

Reportons-nous, par exemple, au calcul du n° **26**, et supposons que l'on fasse $m' = 0$. Alors la case $(m + 1, m' - 1, m'' + 2)$ n'appartient plus au Tableau $T(x, y, z)$, mais si nous faisons abstraction du nombre intermédiaire -1, c'est une case du Tableau $T(x, z)$. Nous convenons alors de remplacer R' par zéro, et de prendre pour R et R'' le couple de polynomes de la case $m + 1$, $m'' + 2$ dans $T(x, z)$. Avec ces conventions, il n'y a qu'à relire le calcul pour s'assurer qu'il subsiste entièrement.

L'interprétation que nous avons donnée (n° **11**) de la méthode de calcul de M. Hermite montre l'usage que l'on peut faire, pour le calcul des polynomes de $T(x, y, z)$, des Tableaux annexés à double entrée.

IV. — Aperçu de la théorie dans le cas de n séries.

30. Les résultats que nous avons obtenus s'étendent, par une induction facile, au cas général où, étant données n séries $S_1, S_2, \ldots, S_n$, on se propose de déterminer les n polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ qui satisfont à l'équation

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \ldots + S_n X_n = S'_1 x^{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n + n - 1}.$$

Nous imaginons que les différents systèmes de polynomes, qui correspondent aux différents systèmes de degrés, sont disposés dans les cases d'un Tableau à n^{uple} entrée $T(x, y, z, \ldots, u, v)$, auquel s'étendent

immédiatement les notions de direction principale et de plan d'égale approximation.

Les degrés extrêmes du déterminant Δ formé par les n^2 polynomes de n cases quelconques du Tableau s'évaluent aisément.

Pour qu'une suite de cases

$$A, B, C, \ldots, H, L, \ldots$$

donne naissance à l'algorithme qui généralise le calcul des réduites des fractions continues simples, il faut et il suffit que chacune des cases de la suite soit plus avancée dans le Tableau T que celle qui la précède, et que, en outre, dans chaque déterminant formé avec les degrés des polynomes de n cases consécutives quelconques, la somme des facteurs d'un terme quelconque ne surpasse pas la somme des éléments de la première ligne augmentée de $n-1$.

Si l'on désigne par

$$\begin{array}{c}(0, \; 0, \; \ldots, \; 0)\\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\\ (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)\end{array}$$

les n systèmes de nombres qui fixent la *disposition relative* de n cases consécutives de la suite, ces nombres doivent satisfaire aux inégalités

$$0 < \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n < \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n < \ldots < \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n,$$
$$\lambda_{i_1} + \mu_{i_2} + \ldots + \rho_{i_{n-1}} \leq n - 1,$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ doivent représenter successivement tous les arrangements des n nombres $1, 2, \ldots, n$, pris $n-1$ à $n-1$.

La résolution de ce système d'inégalités fera connaître, après qu'on aura éliminé les solutions inacceptables, toutes les dispositions relatives possibles. On en conclura la composition de toute suite donnant l'algorithme voulu et les degrés des éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des formules de récurrence.

51. Désignons par $(x, y, z, \ldots, t, u, v)$ les nombres qui définissent la position d'une case dans le Tableau. Si, laissant fixes les $n-1$ premiers d'entre eux, nous donnons au dernier des accroissements successifs égaux à l'unité, nous obtenons une suite de cases pour laquelle les inégalités précédentes sont vérifiées; à cette suite de cases correspond un algorithme régulier, et le calcul des degrés des éléments α, β, γ, ... montre que tous ces degrés sont égaux à l'unité, en sorte que α est un monome du premier degré, et β, γ, ... des binomes du premier degré. Ce résultat subsiste quel que soit celui des n nombres que l'on fasse varier, les $n-1$ autres restant constants; on obtient ainsi n dispositions de cases qui donnent l'algorithme régulier considéré; ce sont les files *perpendiculaires* aux n faces du Tableau.

Si nous laissons fixes $n-2$ des nombres x, y, z, ..., u, v et que nous donnions aux deux restants, alternativement, des accroissements égaux à l'unité, nous obtenons encore une suite de cases pour laquelle les inégalités sont vérifiées; à cette suite correspond un second algorithme régulier, dans lequel tous les éléments α, β, γ, ... sont du premier degré, sauf le dernier qui est de degré zéro. Comme on peut prendre arbitrairement les deux nombres variables, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ dispositions de cases qui donnent naissance à l'algorithme régulier considéré.

En laissant fixes $n-3$ des nombres x, y, ..., u, v et donnant aux trois restants, toujours pris dans le même ordre, successivement, des accroissements égaux à l'unité, on parviendra à un troisième algorithme régulier où tous les éléments α, β, ... sont du premier degré, sauf les deux derniers qui sont du degré zéro. Le nombre des dispositions correspondantes est $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel sont pris les nombres variables.

En continuant ainsi, on arrivera à un dernier algorithme régulier donné par la suite de cases obtenue en donnant à tous les nombres x, y, z, ..., u, v, pris toujours dans le même ordre, successivement, des accroissements égaux à l'unité. Le monome α sera alors du premier degré, et les $n-1$ éléments β, γ, ... seront tous des constantes. Si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les accroissements égaux à

l'unité sont donnés aux n nombres, une seule disposition de cases donne l'algorithme considéré.

On a ainsi n algorithmes réguliers, dans lesquels les éléments α, β, γ, ... ont pour degrés :

$$\begin{array}{l}
1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1,\ 1,\\
1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1,\ 0,\\
1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ 0.\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\\
1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ 0.
\end{array}$$

Ils constituent les n types analogues aux deux types de fractions continues régulières de la première classe.

32. On pourra maintenant effectuer le calcul du système de polynomes X_1, X_2, ..., X_n, en rattachant la case où ils figurent, par une suite de cases de la nature de celles que nous venons de considérer, à un système initial de n cases dont on puisse déterminer, sans difficultés, les systèmes de polynomes; telles sont, par exemple, les cases pour lesquelles tous les nombres x, y, ..., u, v, sauf un, ou même sauf deux, sont nuls. L'usage des suites qui donnent des algorithmes réguliers rendra le calcul aussi simple qu'il peut l'être. On pourra aussi faire usage des Tableaux à $n-1^{\text{uple}}$ entrée

$$T(y, z, \ldots, u, v); \quad T(x, z, \ldots, u, v); \quad \ldots; \quad T(x, y, \ldots, u),$$

au nombre de n, et relatifs aux systèmes de séries

$$S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n; \quad S_1,\ S_3,\ \ldots,\ S_n; \quad \ldots; \quad S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{n-1},$$

que l'on peut annexer au Tableau à n^{uple} entrée $T(x, y, \ldots, u, v)$.

Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques;

PAR M. L. RAFFY.

Les pages qui suivent contiennent la solution complète d'un problème abordé dans un cas particulier par M. Sophus Lie et proposé par M. Darboux aux efforts des géomètres : *Déterminer tous les éléments linéaires doublement harmoniques,* c'est-à-dire réductibles de deux manières, et par suite d'une infinité de manières, au type

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy.$$

Cette solution formait la seconde partie de mes *Recherches sur les surfaces harmoniques* (¹) qui ont obtenu de l'Académie des Sciences une mention honorable dans le concours pour le prix Bordin en 1892. Pour abréger le texte primitif, j'ai retranché du Chapitre premier des développements analytiques rendus superflus par l'emploi ultérieurement fait (Chapitre IV) de la théorie des fonctions; en outre, j'ai supprimé dans les Chapitres II, III et V certains calculs intermédiaires. Rien n'a été changé au Chapitre IV. J'y ai seulement ajouté, hors texte et entre crochets, deux notes, dont l'une complète la seconde démonstration de l'uniformité des solutions, et dont l'autre démontre un

(¹) La première partie est publiée dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* la troisième et dernière dans les *Annales de l'École Normale supérieure.*

lemme incorrectement établi. Je mets aussi entre crochets les renvois qu'il y a lieu de faire à certains de mes travaux antérieurs.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS. LOI DE PASSAGE. LOI DE RÉCIPROCITÉ.

1. Nous commencerons par classer les éléments linéaires réductibles à la forme harmonique. Notre analyse nous fournira les caractères auxquels on reconnaît, un élément linéaire étant donné sous cette forme, s'il est doublement harmonique ou ne l'est pas.

Pour qu'un élément linéaire $\lambda\,dx\,dy$ soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit qu'il existe un changement de variables

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

tel qu'on ait l'identité

$$\lambda\,dx\,dy = [\varphi(x'+y') - f(x'-y')]\,dx'\,dy'.$$

C'est ce qu'exprime l'équation fondamentale

$$2X\lambda''_{x^2} - 2Y\lambda''_{y^2} + 3X'\lambda'_x - 3Y'\lambda'_y + (X'' - Y'')\lambda = 0,$$

qui a été donnée par M. Darboux [1]. On arrive à ce même résultat en exprimant que l'équation aux géodésiques

$$\Delta \equiv \frac{4pq}{\lambda} = 1$$

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 209.

admet une intégrale quadratique

$$\mathrm{I} \equiv \mathrm{A}p^2 + 2\mathrm{B}pq + \mathrm{C}q^2 = \text{const.}$$

En effet, en écrivant que le crochet $[\Delta, \mathrm{I}]$ est identiquement nul, on voit d'abord que A dépend seulement de x et C seulement de y, et si l'on pose $\mathrm{A} = \mathrm{X}$, $\mathrm{C} = \mathrm{Y}$, les deux autres conditions deviennent

$$2\mathrm{X}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \mathrm{X}'\lambda + 2\frac{\partial(\lambda\mathrm{B})}{\partial y} = 0,$$

$$2\mathrm{Y}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \mathrm{Y}'\lambda + 2\frac{\partial(\lambda\mathrm{B})}{\partial x} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer la fonction inconnue $\lambda\mathrm{B}$ pour retrouver l'équation fondamentale. On voit que X et Y sont deux des coefficients de l'intégrale quadratique.

Il convient, pour la discussion qui va suivre [1], d'introduire à la place de λ son logarithme ω. L'équation fondamentale devient alors, après suppression du facteur e^{ω} commun à tous ses termes,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F} \equiv 2\mathrm{X}(\omega_x'^2 + \omega''_{x^2}) &- 2\mathrm{Y}(\omega_y'^2 + \omega''_{y^2}) \\ &+ 3\mathrm{X}'\omega'_x - 3\mathrm{Y}'\omega'_y + \mathrm{X}'' - \mathrm{Y}'' = 0. \end{aligned} \right.$$

A cette équation nous adjoindrons l'équation $\mathrm{F}''_{xy} = 0$, savoir

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\mathrm{X}(\omega_x'^2 + \omega''_{x^2})''_{xy} - 2\mathrm{Y}(\omega_y'^2 + \omega''_{y^2})''_{xy} &+ \mathrm{X}'(4\omega'_x\omega''_{xy} + 5\omega'''_{x^2y}) \\ - \mathrm{Y}'(4\omega'_y\omega''_{xy} + 5\omega'''_{xy^2}) &+ 3(\mathrm{X}'' - \mathrm{Y}'')\omega''_{xy} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette équation ait lieu indépendamment de $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{X}', \mathrm{Y}'$ et $\mathrm{X}'' - \mathrm{Y}''$, il faut que ω''_{xy} soit nul, ce qui exprime que la surface est développable. Cela suffit d'ailleurs, comme on le voit aisément.

Laissant de côté les surfaces développables, nous supposerons désormais ω''_{xy} différent de zéro. L'équation (2) n'est pas une identité, mais elle peut se confondre avec l'équation (1). Pour qu'il en soit ainsi,

---

[1] [L. Raffy, *Sur les spirales harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, 1891 ; p. 518)].

il faut et il suffit qu'en éliminant une des inconnues, $X'' - Y''$ par exemple, entre ces deux équations, on arrive à une relation qui ait lieu indépendamment de X, Y, X′ et Y′; or on trouve de la sorte

$$\begin{aligned} 2X\left[(\omega'^2_x + \omega''_{x^2})''_{xy} - 3\omega''_{xy}(\omega'^2_x + \omega''_{x^2})\right] \\ - 2Y\left[(\omega'^2_y + \omega''_{y^2})''_{xy} - 3\omega''_{xy}(\omega'^2_y + \omega''_{y^2})\right] \\ + 5X'(\omega'''_{x^2y} - \omega'_x\omega''_{xy}) - 5Y'(\omega'''_{xy^2} - \omega'_y\omega''_{xy}) = 0. \end{aligned}$$

Représentons la courbure totale par $-2e^\theta$; nous aurons

$$\frac{1}{R_1R_2} = -2\frac{\omega''_{xy}}{\lambda} = -2e^\theta, \qquad \omega''_{xy} = e^{\omega+\theta},$$

et l'équation précédente prendra la forme plus condensée

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} 2X(\theta'^2_x + \theta''_{x^2} + 4\omega'_x\theta'_x) - 2Y(\theta'^2_y + \theta''_{y^2} + 4\omega'_y\theta'_y) \\ + 5X'\theta'_x - 5Y'\theta'_y = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour qu'elle ait ses quatre coefficients nuls, il faut et il suffit visiblement que θ soit constant, c'est-à-dire que la surface ait sa courbure totale constante. Nous laisserons encore de côté ce cas, facile à reconnaître.

2. En vue d'abréger l'écriture, nous poserons

$$A = \frac{2}{5}(\theta'^2_x + \theta''_{x^2} + 4\omega'_x\theta'_x), \qquad B = \frac{2}{5}(\theta'^2_y + \theta''_{y^2} + 4\omega'_y\theta'_y),$$

de sorte que l'équation précédente deviendra

$$(3') \qquad AX - BY + \theta'_x X' - \theta'_y Y' = 0.$$

Différentions-la séparément par rapport à x et par rapport à y; nous trouvons

$$(4) \qquad A'_x X - B'_x Y + (A + \theta''_{x^2})X' - \theta''_{xy}Y' - \theta'_x X'' = 0,$$

$$(5) \qquad A'_y X - B'_y Y + \theta''_{xy}X' - (B + \theta''_{y^2})Y' - \theta'_y Y'' = 0.$$

Ces équations déterminent X'' et Y'' si aucune des dérivées θ'_x, θ'_y n'est

nulle. Mais elles ne sont pas nulles toutes les deux, puisque nous supposons que l'équation (3) n'est pas une identité; en outre, si l'on suppose qu'une seule soit nulle, on voit aisément, en ayant égard à l'équation (3) et à la définition de θ, que l'autre dérivée est nulle, ce qui est contradictoire. Nous pouvons donc éliminer X″ et Y″ entre les équations (4) et (5) et l'équation (1). Il vient ainsi

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & X\left[\frac{A'_x}{\theta'_x} + \frac{A'_y}{\theta'_y} - 2(\omega'^2_x + \omega''_{x^2})\right] \\ & - Y\left[\frac{B'_x}{\theta'_x} + \frac{B'_y}{\theta'_y} - 2(\omega'^2_y + \omega''_{y^2})\right] + X'\left(\frac{A + \theta''_{y^2}}{\theta'_x} + \frac{\theta''_{xy}}{\theta'_y} - 3\omega'_x\right) \\ & - Y'\left(\frac{B + \theta''_{y^2}}{\theta'_y} + \frac{\theta''_{xy}}{\theta'_x} - 3\omega'_y\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Voyons dans quel cas cette nouvelle équation sera une identité. A cet effet, calculons les coefficients C_1 et D_1 de X′ et de Y′; ils ont respectivement pour expressions

$$C_1 = \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(2\theta + 7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right) - \frac{2}{5}\frac{\theta''_{xy}}{\theta'_y},$$

$$D_1 = \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(2\theta + 7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right) - \frac{2}{5}\frac{\theta''_{xy}}{\theta'_x}.$$

En les égalant à zéro et comparant les deux valeurs de θ''_{xy} tirées des équations ainsi formées, on trouve que le déterminant fonctionnel

$$\theta'_y\frac{\partial}{\partial x}\left(2\theta + 7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right) - \theta'_x\frac{\partial}{\partial y}\left(2\theta + 7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right)$$

est nul. Par conséquent le rapport $\theta'_x\theta'_y : \lambda$ est une fonction de θ. C'est le premier paramètre différentiel $\Delta\theta$ de la fonction θ, et il est bien connu que, quand $\Delta\theta$ est fonction de θ, les courbes $\theta = \text{const.}$ sont parallèles. Donc ici *les lignes d'égale courbure* ($R_1 R_2 = \text{const.}$) *sont parallèles sur toutes les surfaces d'élément linéaire* $\lambda\,dx\,dy$. Or on a ce théorème [1], démontré au début de notre première partie : *Pour qu'une surface dont les lignes d'égale courbure sont parallèles soit harmo-*

(1) [L. RAFFY, *Sur une classe de surfaces harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, 1891; p. 424)].

nique, il faut et il suffit qu'elle soit applicable sur une surface de révolution. Ainsi, dans le cas actuel, les surfaces considérées sont applicables sur des surfaces de révolution.

Nous allons voir qu'il doit encore en être de même, si l'équation (6) se confond avec l'équation (1). En effet, si l'on écrit la proportionnalité des coefficients de X′ et de Y′ dans ces deux équations, on trouve simplement

$$\theta'_y \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\theta'_x \theta'_y}{\lambda} - \theta'_x \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\theta'_x \theta'_y}{\lambda} = 0,$$

ce qui exprime encore que les lignes d'égale courbure sont parallèles. En conséquence, nous pouvons énoncer cette conclusion : *Si l'élément linéaire* $\lambda\, dx\, dy$ *ne convient pas à une surface de révolution, les équations* (3′) *et* (6) *ne sont pas des identités et sont distinctes l'une de l'autre; et réciproquement.*

5. Comme ce résultat suffit pour la suite, nous ne pousserons pas plus loin la discussion générale. Nous supposerons désormais qu'il s'agisse d'éléments linéaires *doublement harmoniques*, c'est-à-dire que λ ait déjà la forme $\varphi(x+y) - f(x-y)$. Nous n'aurons qu'à introduire dans les équations précédemment étudiées la condition

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e^{\omega}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e^{\omega}}{\partial y^2} = 0,$$

qui exprime cette propriété et qui n'est autre que

$$(7) \qquad \omega'^2_x + \omega''_{x^2} = \omega'^2_y + \omega''_{y^2}.$$

Il est clair que cette condition ne modifie en rien notre analyse, et que nous avons toujours, étant donné un élément linéaire doublement harmonique, à distinguer trois cas exclusifs : 1° l'élément linéaire convient à une surface à courbure totale constante, nulle ou différente de zéro; 2° il ne convient pas à une surface à courbure totale constante, mais il convient à une surface de révolution; 3° il ne convient pas à une surface de révolution. Les deux premiers cas seront traités en détail aux Chapitres II et III. Nous allons examiner le troisième.

Remarquons qu'en vertu de la condition (7) les coefficients de X

et de $-Y$ sont égaux dans l'équation fondamentale (1) et aussi dans les équations (3′) et (6). En effet, en se reportant au n° **1** de ce Chapitre, on voit que les expressions primitives de A et de B sont

$$\tfrac{5}{2}\omega''_{xy}\, A = (\omega'^2_x + \omega''_{x^2})''_{xy} - 3\omega''_{xy}(\omega'^2_x + \omega''_{x^2}),$$
$$\tfrac{5}{2}\omega''_{xy}\, B = (\omega'^2_y + \omega''_{y^2})''_{xy} - 3\omega''_{xy}(\omega'^2_y + \omega''_{y^2}).$$

Donc ici les deux fonctions A et B sont identiques, et, par suite, les coefficients de X et de $-Y$ dans les équations (3′) et (6). Ces équations peuvent donc s'écrire

$$(3') \qquad \zeta\,(X - Y) + \theta'_x X' - \theta'_y Y' = 0,$$
$$(6) \qquad \zeta_1(X - Y) + C_1 X' - D_1 Y' = 0,$$

et nous venons de voir (n° **2**) qu'*aucune d'elles ne se réduit à une identité* et que, de plus, *elles sont distinctes l'une de l'autre*. Nous pouvons donc les résoudre et tirer

$$(8) \qquad \frac{X'}{X - Y} = \frac{\zeta_1\theta'_y - \zeta D_1}{D_1\theta'_x - C_1\theta'_y} = \alpha, \qquad \frac{-Y'}{X - Y} = \frac{\zeta C_1 - \zeta_1\theta'_x}{D_1\theta'_x - C_1\theta'_y} = \beta.$$

Pour que les fonctions désignées par α et β soient les dérivées par rapport à x et à y du logarithme d'une expression de la forme $X - Y$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(9) \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial x} = -\alpha\beta.$$

Telles sont les deux équations du sixième ordre auxquelles doit satisfaire la fonction $\varphi - f$. Quand elles sont vérifiées, on connaît, à un facteur constant près, une fonction $X - Y$, dont les dérivées logarithmiques ont les valeurs (8) et qui, par suite, satisfait aux deux équations (3′) et (6). J'ajoute qu'elle vérifie aussi l'équation de départ $F = 0$. En effet, soit Φ le premier membre de l'équation (3′); celui de l'équation (6), d'après sa formation, n'est autre chose que

$$\frac{1}{\theta'_x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{\theta'_y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} - F.$$

Or, il est identiquement nul, ainsi que Φ; par suite, les dérivées Φ'_x et Φ'_y étant nulles aussi, il reste $F = 0$. Ainsi, les équations (9) assurent à l'élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ la propriété d'être doublement harmonique. Elles caractérisent donc les éléments linéaires doublement harmoniques qui ne conviennent pas à des surfaces de révolution.

4. *Loi de passage* (¹). — Voici une remarque qui, bien qu'intuitive, a une grande importance, que nous ne tarderons pas à reconnaître.

Soit un élément linéaire $\lambda(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$ qui acquiert la forme harmonique

$$[\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy \tag{10}$$

par le changement de variables

$$dx = \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}, \qquad dy = \frac{d\eta}{\sqrt{S(\eta)}}, \tag{10'}$$

et qui acquiert aussi une seconde forme harmonique

$$[\varphi_1(x_1+y_1) - f_1(x_1-y_1)]\,dx_1\,dy_1 \tag{11}$$

par le changement de variables

$$dx_1 = \frac{d\xi}{\sqrt{R_1(\xi)}}, \qquad dy_1 = \frac{d\eta}{\sqrt{S_1(\eta)}}. \tag{11'}$$

Pour passer de la première de ces formes à la seconde, il n'y a pas d'autre changement de variables possible que celui-ci :

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}}, \tag{12}$$

(¹) [L. RAFFY, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX, 1889; p. 609)].

où l'on a posé

$$X(x)=\frac{R_1(\xi)}{R(\xi)}=\frac{R_1(\xi)}{\xi'^2(x)},\qquad Y(y)=\frac{S_1(\eta)}{S(\eta)}=\frac{S_1(\eta)}{\eta'^2(y)},$$

le rapport $R_1 : R$ *étant exprimé en fonction de* x *et le rapport* $S_1 : S$ *en fonction de* y, *au moyen des formules* (10').

Il est évident que le changement de variables (12) effectue le passage de (10) à (11); pour s'assurer qu'il est le seul, il suffit de considérer x_1 comme fonction de x par l'intermédiaire de ξ, et y_1 comme fonction de y par l'intermédiaire de η.

La *loi de passage* nous permettra aux Chapitres II et III de résoudre, dans les cas où il est le plus intéressant et le plus difficile, le problème suivant : *Étant donné un élément linéaire doublement harmonique* $(\varphi-f)\,dx\,dy$, *trouver toutes les solutions correspondantes* X *et* Y *de l'équation fondamentale*

$$\begin{aligned}&2(X-Y)(\varphi''-f'')+3X'(\varphi'-f')\\&\quad-3Y'(\varphi'+f')+(X''-Y'')(\varphi-f)=0.\end{aligned}$$

5. *Loi de réciprocité* (¹). — Voici une autre remarque, à peine plus cachée et non moins féconde que la précédente, qui en est essentiellement distincte.

L'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques (équation précédente) est le développement de la condition

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{X}\,\frac{\partial}{\partial x}(\varphi-f)\sqrt{X}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{Y}\,\frac{\partial}{\partial y}(\varphi-f)\sqrt{Y}\right],$$

qui exprime qu'en effectuant le changement de variables

$$dx_1=\frac{dx}{\sqrt{X}},\qquad dy_1=\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

(¹) [L. Raffy, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX, 1889; p. 609)].

on vérifie identiquement l'égalité

$$\begin{aligned}&[\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy\\&\quad=[\varphi_1(x_1+y_1)-f_1(x_1-y_1)]\,dx_1\,dy_1.\end{aligned}$$

Mais, avec les variables auxiliaires $t=x+y$, $z=x-y$, on voit immédiatement que cette équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\varphi}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\sqrt{\varphi}\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{f}\,\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\sqrt{f}\right],$$

ce qui exprime que, par le changement de variables

$$dt_1=\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}},\qquad dz_1=\frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

on vérifie l'identité

$$\left[\mathrm{X}\left(\frac{t+z}{2}\right)-\mathrm{Y}\left(\frac{t-z}{2}\right)\right]dt\,dz=\left[\mathrm{X}_1\left(\frac{t_1+z_1}{2}\right)-\mathrm{Y}_1\left(\frac{t_1-z_1}{2}\right)\right]dt_1\,dz_1.$$

Ainsi, à tout élément linéaire doublement harmonique

$$[\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy,$$

en correspond un autre

$$\left[\mathrm{X}\left(\frac{x+y}{2}\right)-\mathrm{Y}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]dx\,dy,$$

où X et Y ont les significations précisées plus haut. C'est ce que l'on peut énoncer ainsi :

Ayant trouvé quatre fonctions

$$\mathrm{X}(x),\qquad \mathrm{Y}(y),\qquad \varphi(x+y),\qquad f(x-y),$$

qui satisfont à l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques, on en obtiendra une nouvelle solution en prenant pour X, Y, φ *et* f *respectivement les fonctions*

$$\varphi(x),\qquad f(y),\qquad \mathrm{X}\left(\frac{x+y}{2}\right),\qquad \mathrm{Y}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

CHAPITRE II.

LES FORMES HARMONIQUES DE L'ÉLÉMENT LINÉAIRE DES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE.

---

1. Dans ce Chapitre nous nous proposons non seulement de retrouver toutes les formes harmoniques de l'élément linéaire des surfaces à courbure totale constante, mais aussi de déterminer toutes les solutions correspondantes de l'équation

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} 2(X-Y)(\varphi''-f'')+3X'(\varphi'-f') \\ \qquad -3Y'(\varphi'+f')+(X''-Y'')(\varphi-f)=0, \end{array} \right.$$

en vue d'en déduire, par la loi de réciprocité, de nouveaux éléments linéaires doublement harmoniques.

2. *Surfaces développables.* — Aux résultats de Liouville nous ajouterons la détermination des changements de variables qui permettent de passer d'une forme harmonique de l'élément linéaire du plan à une autre.

Pour que l'expression

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy$$

soit l'élément linéaire d'une développable, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$\varphi(x+y) - f(x-y) = \psi(x)\chi(y).$$

On résout cette équation en égalant les dérivées secondes de $\psi\chi$ prises par rapport à x et par rapport à y. On obtient de la sorte six

expressions distinctes des fonctions φ et f, savoir

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} \varphi = a, \\ f = b; \end{cases} \qquad (\mathrm{IV})\ \begin{cases} \varphi = \gamma + me^{2(x+y)}, \\ f = \gamma; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y), \\ f = \gamma - m(x-y); \end{cases} \qquad (\mathrm{V})\ \begin{cases} \varphi = \gamma + me^{2(x+y)}, \\ f = \gamma + me^{-2(x-y)}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\ \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y)^2, \\ f = \gamma + m(x-y)^2; \end{cases} \qquad (\mathrm{VI})\ \begin{cases} \varphi = \gamma + m\,\mathrm{Ch}\,2(x+y), \\ f = \gamma + m\,\mathrm{Ch}\,2(x-y). \end{cases}$$

3. Pour trouver les solutions correspondantes de l'équation (1), partons des relations

$$\varphi - f = \psi\chi, \qquad \varphi' - f' = \psi'\chi, \qquad \varphi' + f' = \psi\chi',$$

auxquelles nous adjoindrons celle-ci

$$\varphi'' - f'' = r(\varphi - f) = r\psi\chi, \qquad r(r-4) = 0$$

vérifiée par les fonctions (I), (II), (III) parce que $\varphi'' - f''$ et r sont nuls, et par les fonctions (IV), (V), (VI), parce que $\varphi'' = 4\varphi$ et $f'' = 4f$. Grâce à ces remarques nous pourrons écrire l'équation (1) de cette manière

$$2r(\mathrm{X} - \mathrm{Y}) + 3\mathrm{X}'\frac{\psi'}{\psi} - 3\mathrm{Y}'\frac{\chi'}{\chi} + \mathrm{X}'' - \mathrm{Y}'' = 0.$$

On voit que cette équation se sépare en deux

$$2r\mathrm{X} + 3\mathrm{X}'\frac{\psi'}{\psi} + \mathrm{X}'' = \text{const.} = 2k,$$

$$2r\mathrm{Y} + 3\mathrm{Y}'\frac{\chi'}{\chi} + \mathrm{Y}'' = \text{const.} = 2k,$$

qu'on intègre en donnant à ψ et χ les expressions qui correspondent aux six solutions rappelées.

Il suffit, quand les intégrations ne sont pas immédiates, de multi-

plier soit par ψ soit par χ et de remplacer au besoin 4ψ par ψ'' et 4χ par χ'', pour les rendre possibles. Nous ne ferons que transcrire le Tableau des résultats, où tous les coefficients désigneront des constantes arbitraires.

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \varphi = a, & f = b; \\ X = kx^2 + a_1 x + a_0, & Y = ky^2 + b_1 y + b_0. \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y), & f = \gamma - m(x-y); \\ X = \frac{k}{4}x^2 + a_0 + \frac{a_1}{x^2}, & Y = ky^2 + b_1 y + b_0. \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y)^2, & f = \gamma + m(x-y)^2; \\ X = \frac{k}{4}x^2 + a_0 + \frac{a_1}{x^2}, & Y = \frac{k}{4}y^2 + b_0 + \frac{b_1}{y^2}. \end{cases}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \varphi = \gamma + me^{2(x+y)}, & f = \gamma; \\ X = c + a_0 e^{-2x} + a_1 e^{-4x}, & Y = c + b_0 e^{-2y} + b_1 e^{-4y}. \end{cases}$$

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} \varphi = \gamma + me^{2(x+y)}, & f = \gamma + me^{-2(x-y)}; \\ X = c + a_0 \operatorname{Ch}^{-2} 2x + a_1 \operatorname{Sh}^{-2} 2x, & Y = c + b_0 e^{-2y} + b_1 e^{-4y}. \end{cases}$$

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} \varphi = \gamma + m \operatorname{Ch} 2(x+y), & Y = \gamma + m \operatorname{Ch} 2(x-y); \\ X = c + a_0 \operatorname{Ch}^{-2} 2x + a_1 \operatorname{Sh}^{-2} 2x, & f = c + b_0 \operatorname{Ch}^{-2} 2y + b_1 \operatorname{Sh}^{-2} 2y. \end{cases}$$

Ces diverses expressions de X et de Y s'obtiendraient aisément par l'application de la loi de passage, dont nous allons nous servir bientôt.

4. *Surfaces à courbure différente de zéro.* — Pour ces surfaces les formes harmoniques de l'élément linéaire ont été déterminées par M. Darboux [1]. Après les avoir rappelées, nous ferons connaître tous les changements de variables par lesquels on passe de l'une à l'autre.

Liouville a montré que l'élément linéaire de toute surface à courbure constante $-2c$, rapportée à ses lignes de longueur nulle, est de

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 209-211.

la forme

$$ds^2 = -\frac{2}{c}\frac{\xi'\eta'\,dx\,dy}{(\xi-\eta)^2},$$

où ξ, η désignent des fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y, et ξ', η' leurs dérivées. Il faut donc déterminer les fonctions ξ, η de telle sorte qu'on ait identiquement

$$\frac{\xi'\eta'}{(\xi-\eta)^2} = \varphi(x+y) - f(x-y).$$

On trouve ainsi qu'elles satisfont à la même équation différentielle

$$\xi'^2 = R(\xi), \qquad \eta'^2 = R(\eta),$$

où $R(\rho)$ est un polynôme du quatrième degré à coefficients arbitraires, qu'on peut soumettre à telle transformation homographique qu'on voudra.

1° Si R a ses quatre racines égales, on prend $R_1(\rho) = 1$; d'où

$$\xi_1'^2 = 1, \qquad \eta_1'^2 = 1; \qquad \xi_1 = x, \qquad \eta_1 = y;$$

et, en supposant désormais la courbure égale à 4,

$$\text{(I)} \qquad ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

2° Si R est carré parfait, on prend $R_2(\rho) = (\rho^2+1)^2$; d'où

$$\xi_2'^2 = (\xi_2^2+1)^2, \qquad \eta_2'^2 = (\eta_2^2+1)^2; \qquad \xi_2 = \operatorname{tang} x, \qquad \eta_2 = \operatorname{tang} y;$$

$$\text{(II)} \qquad ds^2 = \frac{dx\,dy}{\sin^2(x-y)}.$$

3° Si R a une racine triple, on prend $R_3(\rho) = 4\rho$; d'où

$$\xi_3'^2 = 4\xi_3, \qquad \eta_3'^2 = 4\eta_3; \qquad \xi_3 = x^2, \qquad \eta_3 = y^2;$$

$$\text{(III)} \qquad ds^2 = -\left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right]dx\,dy.$$

4° Si R n'a qu'une racine double, on prend $R_4(\rho) = 4\rho^2(\rho - 1)$; d'où

$$\xi_4'^2 = 4\xi_4^2(\xi_4 - 1), \quad \eta_4'^2 = 4\eta_4^2(\eta_4 - 1); \quad \xi_4 = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \eta_4 = \frac{1}{\sin^2 y};$$

$$\text{(IV)} \qquad ds^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{\sin^2(x-y)}\right] dx\, dy.$$

5° Si R a ses racines distinctes, nous prendrons

$$R_5(\rho) = 4\rho^3 - g_2\rho - g_3;$$

d'où

$$\xi_5'^2 = 4\xi_5^3 - g_2\xi_5 - g_3, \qquad \eta_5'^2 = 4\eta_5^3 - g_2\eta_5 - g_3;$$

$$\xi_5 = p(x), \qquad \eta_5 = p(y);$$

$$\text{(V)} \qquad ds^2 = [p(x+y) - p(x-y)]\, dx\, dy.$$

5. Cherchons maintenant toutes les solutions de l'équation

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2(X - Y)(\varphi'' - f'') + 3X'(\varphi' - f') \\ \quad - 3Y'(\varphi' + f') + (X'' - Y'')(\varphi - f) = 0, \end{array} \right.$$

où les fonctions φ et f ont l'une des cinq formes précédentes. La loi de passage les donne sans calcul. En effet, partons de la forme initiale

$$ds^2 = \frac{d\xi\, d\eta}{(\xi - \eta)^2},$$

et remplaçons-y les fonctions ξ, η par l'une des cinq solutions ξ_i, η_i que nous venons de trouver. De la forme harmonique ainsi obtenue on passera à une autre au moyen des fonctions

$$X = \frac{R(\xi_i)}{\xi_i'^2}, \qquad Y = \frac{R(\eta_i)}{\eta_i'^2},$$

où $R(\rho)$ désigne le polynôme le plus général du quatrième degré en ρ. Il n'y aura qu'à exprimer X en x et Y en y pour avoir les solutions cherchées de l'équation (1). Donnant à l'indice i les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, nous obtenons le Tableau suivant, où nous n'écrirons que X.

parce que Y est la même fonction de y que X de x :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma, & f = \gamma - (x-y)^{-2}; \\ X = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E. \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma, & f = \gamma - \sin^{-2}(x-y); \\ X = A\sin^4 x + B\sin^3 x\cos x + C\sin^2 x\cos^2 x + D\sin x\cos^3 x + E\cos^4 x. \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma - (x+y)^{-2}, & f = \gamma - (x-y)^{-2}; \\ X = Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D + Ex^{-2}. \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma - \sin^{-2}(x+y), & f = \gamma - \sin^{-2}(x-y); \\ X = \dfrac{A\sin^8 x + B\sin^6 x + C\sin^4 x + D\sin^2 x + E}{\sin^2 x\cos^2 x}. \end{cases}$$

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma + \wp(x+y), & f = \gamma + \wp(x-y); \\ X = \dfrac{A\wp^4(x) + B\wp^3(x) + C\wp^2(x) + D\wp(x) + E}{4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3}. \end{cases}$$

Dans ces formules, les cinq coefficients A, B, C, D, E, les deux invariants g_2, g_3 et le paramètre γ ont des valeurs entièrement arbitraires.

CHAPITRE III.

LES SURFACES DE RÉVOLUTION DOUBLEMENT HARMONIQUES.

1. Les surfaces de révolution dont nous allons nous occuper sont celles dont l'élément linéaire est réductible à la forme harmonique

$$ds^2 = [\varphi(x'+y') - f(x'-y')]\,dx'\,dy',$$

autrement qu'avec la restriction $\varphi f = 0$ qui caractérise toutes les surfaces de révolution. On peut dire que ces surfaces sont celles pour

lesquelles le problème des géodésiques admet à la fois une intégrale linéaire, comme pour toutes les surfaces de révolution, et une intégrale quadratique, distincte du carré de l'intégrale linéaire. C'est en posant la question dans ces termes que M. Darboux l'a résolue [1]. Il prend l'élément linéaire d'une surface de révolution sous la forme

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{U}'(u)\, dv^2,$$

et montre que la fonction $\mathrm{U}'(u)$ est définie par l'équation

$$u = \int \frac{\mathrm{U}'^2\, d\mathrm{U}'}{m\,\mathrm{U}'^4 + 2n\,\mathrm{U}'^2 + m'},$$

où m, n et m' sont trois constantes arbitraires.

Il convient pour notre objet de pousser plus loin les calculs, puisque nous nous proposons non seulement de déterminer toutes les formes harmoniques que peut revêtir l'élément linéaire des surfaces considérées, mais aussi d'obtenir toutes les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques, dans l'hypothèse où $(\varphi - f)\,dx\,dy$ est un élément linéaire de surface de révolution.

2. A cette fin nous commencerons [2] par *trouver toutes les fonctions* λ *de* $x + y$ *seulement qui satisfont à l'équation fondamentale*

$$2\mathrm{X}\lambda''_{x^2} - 2\mathrm{Y}\lambda''_{y^2} + 3\mathrm{X}'\lambda'_x - 3\mathrm{Y}'\lambda'_y + (\mathrm{X}'' - \mathrm{Y}'')\lambda = 0.$$

En procédant exactement comme au début du Chapitre premier, nous rencontrons d'abord les surfaces à courbure totale constante. Nous ne nous y arrêterons pas, ayant au Chapitre II complètement résolu dans ce cas les deux problèmes indiqués.

Dès lors l'équation (3) du Chapitre I n'est pas une identité. On

---

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, livre VI, n° 596.

(2) [L. Raffy, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVIII, 1889; p. 493). — *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII_2, 1889; p. 161)].

en tire pour le rapport $(X' - Y') : (X - Y)$ une expression qui ne dépend que de $x + y$. Si l'on introduit les variables auxiliaires

$$t = x + y, \qquad z = x - y,$$

on voit que la dérivée logarithmique

$$\frac{X' - Y'}{X - Y} = 2\frac{\partial \log(X - Y)}{\partial t}$$

est fonction de t seulement, de sorte qu'on a

$$X - Y = \psi(x + y)\chi(x - y).$$

La résolution de cette équation indéterminée, qui entraîne immédiatement

$$\frac{\psi''}{\psi} = \frac{\chi''}{\chi} = \text{const.},$$

ne présente pas de difficulté. Connaissant les fonctions ψ et χ, on connaît X et Y. Leur forme est telle qu'on peut toujours intégrer l'équation différentielle linéaire du second ordre qui détermine λ. Il n'y a plus alors qu'à transformer $\lambda(x + y)\,dx\,dy$ au moyen des relations

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

pour obtenir toutes les formes harmoniques de l'élément linéaire des surfaces considérées. Nous les réunirons avec d'autres résultats dans un Tableau placé à la fin du Chapitre. Nous n'écrirons ici que les quatre types primitifs d'où elles dérivent :

(I) $$ds^2 = P(x + y)\,dx\,dy,$$

(II) $$ds^2 = \left[\frac{P}{(x + y)^2} + Q\right]dx\,dy,$$

(III) $$ds^2 = [P\,e^{2(x+y)} + Q\,e^{x+y}]\,dx\,dy,$$

(IV) $$ds^2 = \left[\frac{P}{\text{Ch}^2(x + y)} + \frac{Q}{\text{Sh}^2(x + y)}\right]dx\,dy.$$

Les lettres P et Q désignent des constantes arbitraires. Nous avons négligé celle qu'on peut ajouter à l'argument $x+y$ et celle par laquelle on peut multiplier les variables.

5. *Remarque.* — Il n'est pas sans intérêt de signaler une propriété des surfaces qui nous occupent. Dans son Mémoire sur les lignes géodésiques ([1]), M. Sophus Lie n'aborde pas le problème des surfaces de révolution doublement harmoniques; mais trois des types ci-dessus se rencontrent dans la Note I de ce Mémoire, consacrée à une étude approfondie de la représentation géodésique des surfaces. M. Lie recherche en effet toutes les représentations géodésiques des surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = (x+y)\,dx\,dy \tag{I}$$

et distingue particulièrement les deux classes de surfaces qui ont respectivement pour éléments linéaires les deux expressions

$$ds^2 = (xy+1)\,dx\,dy,$$
$$ds^2 = \left[\frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}\right] dx\,dy,$$

dont la première revient à notre type (III) et la dernière à notre type (IV). Mais notre type (II) répond aussi à la question. En effet le théorème de M. Dini s'applique à l'élément linéaire

$$ds^2 = (U-V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2),$$

lors même que les fonctions V et V_1 se réduisent à des constantes. Quand M. Lie, partant de

$$(au-bv)(du^2-dv^2),$$

trouve (p. 429) par l'emploi de ce théorème l'expression

$$\left(\frac{1}{au+\varepsilon} - \frac{1}{bv+\varepsilon}\right)\left(\frac{du^2}{au+\varepsilon} - \frac{dv^2}{bv+\varepsilon}\right),$$

([1]) *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Mathem. Annalen*, t. XX p. 357-454).

rien n'empêche de supposer b nul, ce qui conduit à notre type (II). En conséquence, on a ce théorème :

Deux surfaces de révolution doublement harmoniques, choisies d'une manière quelconque, peuvent être représentées géodésiquement l'une sur l'autre.

4. Pour déterminer toutes les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques quand $(\varphi - f)\,dx\,dy$ est l'une des formes dérivées des quatre types précédents, nous ferons l'application réitérée de la *loi de passage* exposée au Chapitre I.

Nous groupons ensemble sous le même numéro, avec des indices différents, les solutions qui correspondent aux éléments linéaires transformés d'un même type. Soit (J) l'un de ces types $\lambda(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta$ écrit avec les lettres ξ et η à la place de x et de y. Représentons par

$$(i) \qquad dx = \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}, \qquad dy = \frac{d\eta}{\sqrt{S(\eta)}}$$

le changement de variables *particulier* qui opère le passage de (J) à *une certaine* de ses formes dérivées (J_i) et par

$$dx_1 = \frac{d\xi}{\sqrt{R_1(\xi)}}, \qquad dy_1 = \frac{d\eta}{\sqrt{S_1(\eta)}}$$

le changement de variables *général* qui opère le passage de (J) à l'*une quelconque* de ses formes dérivées. Si l'on pose

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{R_1 : R}}, \qquad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{S_1 : S}},$$

les expressions écrites sous les radicaux représentent de la manière la plus générale les fonctions X et Y propres à opérer le passage de la forme (J_i) à l'une quelconque des autres formes dérivées du type (J), pourvu qu'on en chasse ξ et η par l'emploi des relations (i), afin de n'y laisser subsister que x et y. On obtient ainsi le Tableau suivant, où tous les coefficients désignent des constantes arbitraires.

$$\begin{cases} \varphi = P(x+y)+\gamma, \\ X = cx+m, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=\gamma, \\ &Y = cy+n; \end{aligned}$$

)

$$\begin{cases} \varphi = (m+n)(x+y)+\gamma, \\ X = \dfrac{cx}{m}+a, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=(n-m)(x-y)+\gamma, \\ &Y = \dfrac{cy}{n}+b; \end{aligned}$$

)

$$\begin{cases} \varphi = (x+y)^4 - g(x+y)^2+\gamma, \\ X = mx^{-2}+c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=(x-y)^2-g(x-y)^2+\gamma, \\ &Y = ny^{-2}+c. \end{aligned}$$

)

$$\begin{cases} \varphi = P(x+y)^{-2}, \\ X = ax^2+bx+c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=-Q, \\ &Y = ay^2-by+c; \end{aligned}$$

$_1)$

$$\begin{cases} \varphi = Q(x+y)^2 - P(x+y)^{-2}+\gamma, \\ X = ax^2+b+cx^{-2}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=Q(x-y)^2-P(x-y)^{-2}+\gamma, \\ &Y = ay^2+b+cy^{-2}; \end{aligned}$$

$_2)$

$$\begin{cases} \varphi = Qe^{2(x+y)}+\gamma, \\ X = a+be^{-2x}+ce^{-4x}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=P\,\mathrm{Ch}^{-2}(x-y)+\gamma, \\ &Y = a-be^{-2y}+ce^{-4y}; \end{aligned}$$

$_3)$

$$\begin{cases} \varphi = P\cos^{-2}(x+y) - Q\cos^2(x+y)+\gamma, \\ X = (a\cos^2 2x+b\cos 2x+c)\sin^{-2}2x, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=P\cos^{-2}(x-y)-Q\cos^2(x-y)+\gamma, \\ &Y = (a\cos^2 2y-b\cos 2y+c)\sin^{-2}2y. \end{aligned}$$

I)

$$\begin{cases} \varphi = Pe^{2(x+y)}+Qe^{x+y}+\gamma, \\ X = ae^{-2x}+c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=\gamma, \\ &Y = be^{-2y}+c; \end{aligned}$$

$I_1)$

$$\begin{cases} \varphi = P(x+y)^2+Q, \\ X = cx^2+a, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=P(x-y)^2, \\ &Y = cy^2+b; \end{aligned}$$

$I_2)$

$$\begin{cases} \varphi = Pe^{2(x+y)}+Qe^{x+y}+\gamma, \\ X = a\,\mathrm{Sh}^{-2}x+c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=Pe^{2(x-y)}+Qe^{x-y}+\gamma, \\ &Y = be^{-2y}+c; \end{aligned}$$

$I_3)$

$$\begin{cases} \varphi = P\,\mathrm{Ch}\,2(x+y)+Q\,\mathrm{Ch}(x+y)+\gamma, \\ X = a\,\mathrm{Sh}^{-2}x+c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=P\,\mathrm{Ch}\,2(x-y)+Q\,\mathrm{Ch}(x-y)+\gamma, \\ &Y = b\,\mathrm{Sh}^{-2}y+c; \end{aligned}$$

)

$$\begin{cases} \varphi = P\,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y)+Q\,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y)+\gamma, \\ X = ae^{4x}+be^{-4x}+c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=\gamma, \\ &Y = ae^{4y}+be^{-4y}+c; \end{aligned}$$

$_1)$

$$\begin{cases} \varphi = P(x+y)^{-2}+\gamma, \\ X = ax^4+bx^2+c, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=Q(x+y)^{-2}+\gamma, \\ &Y = ay^4+by^2+c; \end{aligned}$$

$_2)$

$$\begin{cases} \varphi = P\,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y)+Q\,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y)+\gamma, \\ X = (a\,\mathrm{Ch}^4 2x+b\,\mathrm{Ch}^2 2x+c)\,\mathrm{Sh}^{-2}2x, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=P\,\mathrm{Ch}^{-2}(x-y)+Q\,\mathrm{Sh}^{-2}(x-y)+\gamma, \\ &Y = (a\,\mathrm{Ch}^4 2y+b\,\mathrm{Ch}^2 2y+c)\,\mathrm{Sh}^{-2}2y; \end{aligned}$$

$_3)$

$$\begin{cases} \varphi = P\sin^{-2}(x+y)+\gamma, \\ X = a\sin^2 2x+b, \end{cases} \qquad \begin{aligned} &f=Q\sin^{-2}(x-y)+\gamma, \\ &Y = a\sin^2 2y+b; \end{aligned}$$

$_4)$

$$\begin{cases} \varphi = Q\,\mathrm{sn}^2(x+y) - P\,\mathrm{cn}^2(x+y)\,\mathrm{dn}^{-2}(x+y)+\gamma, \qquad f = Q\,\mathrm{sn}^2(x-y) - P\,\mathrm{cn}^2(x-y)\,\mathrm{dn}^{-2}(x-y)+\gamma, \\ X = \dfrac{a[k^4(2-k^2)\mathrm{sn}^8 x - 4k^2\,\mathrm{sn}^6 x + 6k^4\,\mathrm{sn}^4 x - 4k^2\,\mathrm{sn}^2 x + 2 - k^2] + b(k^2\,\mathrm{sn}^4 x - 2\,\mathrm{sn}^2 x + 1)}{\mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{cn}^2 x\,\mathrm{dn}^2 x}. \end{cases}$$

Dans la dernière solution de ce Tableau, nous n'avons pas écrit Y,

qui est la même fonction de y que X de x; toutes les fonctions elliptiques ont le même module arbitraire k.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES ÉLÉMENTS LINÉAIRES DOUBLEMENT HARMONIQUES.

I. — Premiers résultats.

1. Au moment d'aborder la recherche générale des éléments linéaires doublement harmoniques, il importe de rappeler une distinction qui s'est introduite au Chapitre I entre ceux de ces éléments linéaires qui conviennent à des surfaces de révolution et ceux qui ne jouissent pas de cette propriété. Pour les premiers, l'équation aux géodésiques admet, comme l'a montré M. Darboux [1], jusqu'à *trois* intégrales quadratiques distinctes

$$I_i = X_i p^2 + 2B_i pq + Y_i q^2 = C_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nous avons remarqué d'autre part que les fonctions X et Y de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques

$$\begin{aligned} 2(X - Y)(\varphi'' - f'') + 3X'(\varphi' - f') \\ - 3Y'(\varphi' + f') + (X'' - Y'')(\varphi - f) = 0 \end{aligned}$$

sont précisément les coefficients extrêmes d'une intégrale quadratique. On aura donc, si

$$ds^2 = [\varphi(x + y) - f(x - y)]\, dx\, dy$$

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces*, Liv. VII, Chap. VI, n° 596. Nous supposons dans le texte l'élément linéaire mis sous la forme $\lambda\, dx\, dy$.

est un élément linéaire de surface de révolution, trois couples de solutions de l'équation précédente, savoir X_1 et Y_1, X_2 et Y_2, X_3 et Y_3. De là résulte que l'équation est encore vérifiée par

$$X = S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3, \qquad Y = S_1 Y_1 + S_2 Y_2 + S_3 Y_3,$$

quelles que soient les trois constantes S_1, S_2 et S_3. L'une des solutions que nous venons de combiner, la dernière par exemple, est nécessairement de la forme $X_3 = Y_3 = \text{const.}$ On aura donc

$$X - Y = S_1(X_1 - Y_1) + S_2(X_2 - Y_2),$$

ce qui montre que les deux dérivées logarithmiques de $X - Y$,

$$\frac{X'}{X - Y}, \qquad \frac{-Y'}{X - Y},$$

dépendent d'une arbitraire, qui est le rapport $S_1 : S_2$, et qui ne figure pas dans $\varphi - f$. Ainsi l'on s'explique pourquoi l'analyse du Chapitre I ne détermine pas ces deux dérivées logarithmiques en fonction explicite de $\varphi - f$ et de ses dérivées, quand la surface est applicable sur une surface de révolution. Dans le cas contraire, ces dérivées sont parfaitement déterminées, une fois donné l'élément linéaire. Il suit de là qu'il ne peut exister plus de deux intégrales quadratiques distinctes pour le problème des géodésiques, sans que la surface soit applicable sur une surface de révolution. C'est la réciproque de la proposition de M. Darboux. *Si l'équation aux géodésiques d'une surface admet plus de deux intégrales quadratiques distinctes, la surface est applicable sur une surface de révolution.* Ajoutons que, si la surface a sa courbure totale constante, il existe *cinq* intégrales quadratiques distinctes; c'est ce qui ressort immédiatement du Tableau placé à la fin du Chapitre II.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces éléments linéaires auxquels correspondent plusieurs intégrales quadratiques et qu'on pourrait appeler *multiplement harmoniques;* toutes leurs formes ont été données dans les Chapitres II et III. Nous arrivons aux éléments linéaires *doublement harmoniques* au sens propre du mot, ceux pour lesquels

les fonctions $\varphi(x+y)$ et $f(x-y)$ sont telles que l'équation fondamentale détermine la différence $X - Y$, à un facteur constant près.

2. Le seul élément linéaire de cette nature que nous ayons rencontré jusqu'ici est celui qui a été découvert par M. Darboux et cité au Chapitre précédent :

$$ds^2 = \left[\frac{P}{(\xi+\eta)^2} + \frac{Q}{(\xi-\eta)^2} + \frac{P_1}{(1+\xi\eta)^2} + \frac{Q_1}{(1-\xi\eta)^2}\right] d\xi\, d\eta.$$

Si l'on pose $\xi = \operatorname{tang} x$, $\eta = \operatorname{tang} y$, il acquiert la forme harmonique très simple

$$ds^2 = \left[\frac{P}{\sin^2(x+y)} + \frac{Q_1}{\cos^2(x+y)} + \frac{Q}{\sin^2(x-y)} + \frac{P_1}{\cos^2(x-y)}\right] dx\, dy.$$

Par un changement de variables plus général, M. Darboux le transforme en

$$ds^2 = [\psi(x+y) - \psi(x-y)]\, dx\, dy,$$

ψ désignant la fonction doublement périodique

$$\psi(w) = A_0 \frac{\operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{dn}^2 w} + B_0 \operatorname{sn}^2 w + \frac{C_0}{\operatorname{sn}^2 w} + D_0 \frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{cn}^2 w} + E_0.$$

Si l'on remplace x par $mx + a$, y par $my + b$, on voit que cet élément linéaire dépend de *huit* constantes arbitraires, A_0, B_0, C_0, D_0, le module k, le multiplicateur m, plus enfin a et b, la constante E_0 disparaissant par soustraction.

Ce beau résultat va s'offrir tout à l'heure, par l'application de principes posés précédemment, d'abord sous la forme trigonométrique, puis sous la forme elliptique

$$ds^2 = [\psi(x+y) - \psi(x-y)]\, dx\, dy,$$

ψ désignant cette fois la fonction

$$\psi(w) = \frac{A p^4(w) + B p^3(w) + C p^2(w) + D p(w) + E}{p'^2(w;\, g_2, g_3)},$$

où les deux invariants g_2, g_3 sont arbitraires, ainsi que les constantes du numérateur; l'une d'elles disparaissant dans la différence

$$\psi(x+y)-\psi(x-y),$$

il n'en reste plus dans l'élément linéaire que six, abstraction faite des deux constantes qu'on peut ajouter aux deux arguments, ce qui porte à *huit* le nombre total des arbitraires. D'après les propriétés connues de la fonction p, on n'introduirait pas de nouvelle constante en multipliant x et y par un facteur m; les invariants seuls seraient modifiés. Pour reconnaître l'identité des deux expressions de $\psi(w)$, il suffit de remplacer dans la seconde p par sn, au moyen de la formule classique (¹)

$$p(w;\, g_2, g_3) = -\frac{(1+k^2)m^2}{3} + \frac{m^2}{\operatorname{sn}^2(mw)}.$$

On trouvera ainsi pour $\psi(w)$ une fraction ayant pour dénominateur le produit $\operatorname{sn}^2\operatorname{cn}^2\operatorname{dn}^2$ et pour numérateur un polynôme du quatrième degré en $\operatorname{sn}^2(mw)$, à coefficients arbitraires. C'est précisément ce que devient la première expression de $\psi(w)$ quand on réduit tous ses termes au même dénominateur et qu'on remplace w par mw.

5. Voici maintenant comment on peut obtenir d'autres solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques. La loi de passage nous a permis de trouver (Chap. II et III) toutes les solutions de cette équation dans le cas des surfaces développables, des surfaces à courbure totale constante et des surfaces de révolution. A ces solutions, qui sont assez nombreuses, appliquons la loi de réciprocité qui termine le Chapitre I; nous en obtiendrons de nouvelles, et toutes celles qui ne rentreront pas dans celles d'où l'on part répondront à la question.

Pour éviter des doubles emplois, portons notre attention sur le Tableau du Chapitre III où figurent toutes les solutions provenant

---

(¹) Halphen, *Théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 24.

des surfaces de révolution. Les seize expressions de X et Y qu'il contient rentrent toutes, sans exception, soit dans les expressions trouvées pour X et Y à propos des développables, soit dans celles qui correspondent aux surfaces à courbure totale constante (Tableau final du Chapitre II). Il ne pourrait y avoir d'hésitation que pour la solution doublement périodique marquée (IV_4); mais les explications que nous venons de donner relativement aux deux formes de la fonction $\psi(w)$ prouvent que cette solution rentre dans la solution (V) du Tableau relatif aux surfaces à courbure constante.

Il suffit donc d'appliquer la loi de réciprocité aux six solutions provenant des développables et aux cinq solutions de ce dernier Tableau. Voici les résultats trouvés.

I. — *Solutions réciproques provenant des développables.*

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} X = \gamma + mx, & \varphi = c(x+y)^2 + a_0 + a_1(x+y)^{-2}, \\ Y = \gamma - my; & f = 4c(x-y)^2 + b_1(x-y) + b_0. \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\ \begin{cases} X = \gamma + mx^2, & \varphi = c(x+y)^2 + a_0 + a_1(x+y)^{-2}, \\ Y = \gamma + my^2; & f = c(x-y)^2 + b_0 + b_1(x-y)^{-2}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV})\ \begin{cases} X = \gamma + me^{2x}, & \varphi = c + a_0\,e^{-(x+y)} + a_1\,e^{-2(x+y)}, \\ Y = \gamma; & f = c + b_0\,e^{-(x-y)} + b_1\,e^{-2(x-y)}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{V})\ \begin{cases} X = \gamma + m\,e^{2x}, & \varphi = c + a_0\,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y) + a_1\,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y), \\ Y = \gamma + m\,e^{-2y}; & f = c + b_0\,e^{-(x-y)} + b_1\,e^{-2(x-y)}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{VI})\ \begin{cases} X = \gamma + m\,\mathrm{Ch}(2x), & \varphi = c + a_0\,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y) + a_1\,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y), \\ Y = \gamma + m\,\mathrm{Ch}(2y); & f = c + b_0\,\mathrm{Ch}^{-2}(x-y) + b_1\,\mathrm{Sh}^{-2}(x-y). \end{cases}$$

II. — *Solutions réciproques provenant des surfaces à courbure constante.*

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} X = \gamma, \qquad Y = \gamma - my^{-2}; \\ \varphi(x+y) = \mathrm{A}(x+y)^4 + \mathrm{B}(x+y)^3 + \mathrm{C}(x+y)^2 + \mathrm{D}(x+y) + \mathrm{E}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ \begin{cases} X = \gamma, \qquad Y = \gamma - m\sin^{-2}y; \\ \varphi(x+y) = \mathrm{A}\sin^4(x+y) + \mathrm{B}\sin^3(x+y)\cos(x+y) \\ \qquad + \mathrm{C}\sin^2(x+y)\cos^2(x+y) \\ \qquad + \mathrm{D}\sin(x+y)\cos^3(x+y) + \mathrm{E}\cos^4(x+y). \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\ \begin{cases} X = \gamma + mx^{-2}, \qquad Y = \gamma + my^{-2}; \\ \varphi(x+y) = \mathrm{A}(x+y)^6 + \mathrm{B}(x+y)^4 + \mathrm{C}(x+y)^2 + \mathrm{D} + \mathrm{E}(x+y)^{-2}; \end{cases}$$

$$(\text{IV})\quad \begin{cases} X = \gamma + m \sin^{-2} 2x, \qquad Y = \gamma + m \sin^{-2} 2y; \\ \varphi(x+y) = \dfrac{A \sin^8(x+y) + B \sin^6(x+y) + C \sin^4(x+y) + D \sin^2(x+y) + E}{\sin^2(x+y)\cos^2(x+y)}. \end{cases}$$

$$(\text{V})\quad \begin{cases} X = \gamma + m\, p(2x), \qquad Y = \gamma + m\, p(2y); \\ \varphi(x+y) = \dfrac{A p^4(x+y) + B p^3(x+y) + C p^2(x+y) + D p(x+y) + E}{p'^2(x+y; g_2, g_3)}. \end{cases}$$

Dans les solutions du second groupe nous n'avons pas écrit f, qui est la même fonction de $x - y$ que φ de $x + y$.

Le dernier élément linéaire du premier groupe et le dernier du second ne diffèrent pas de celui de M. Darboux, pris sous ses deux formes trigonométrique et elliptique. Nous n'avons pas écrit la solution I du premier groupe, parce que l'élément linéaire qu'elle fournit convient à une surface de révolution. On remarquera que dans le premier groupe les fonctions φ et f sont différentes, tandis qu'elles sont les mêmes dans le second.

II. — Uniformité des solutions.

4. Dans les dix solutions que nous venons d'obtenir, les quatre fonctions X, Y, φ et f sont des *fonctions uniformes*. C'est là une propriété fort importante, qui appartient, comme nous allons le faire voir, à *toutes* les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques.

Théorème. — *Dans tout système de solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques*

$$\begin{aligned} &2X(\varphi'' - f'') + 3X'(\varphi' - f') + X''(\varphi - f) \\ &\quad = 2Y(\varphi'' - f'') + 3Y'(\varphi' + f') + Y''(\varphi - f) \end{aligned}$$

les quatre fonctions $X(x)$, $Y(y)$, $\varphi(x+y)$ *et* $f(x-y)$ *sont nécessairement uniformes.*

Tout revient évidemment à prouver que *l'une* de ces fonctions, Y par exemple, est uniforme; le même raisonnement est valable pour X. Dès lors, X et Y étant uniformes, la loi de réciprocité montre que φ

et f le sont aussi. Car, si φ et f pouvaient être multiformes, il existerait, en vertu de la loi de réciprocité, une solution dans laquelle X et Y seraient multiformes. Je dis donc que Y ne peut pas admettre deux déterminations différentes pour chaque valeur de y.

On pourrait être tenté de raisonner ainsi : l'équation proposée admettrait les deux solutions X_0, Y_1 et X_0, Y_2, d'où la solution plus générale

$$X = (S_1 + S_2) X_0, \qquad Y = S_1 Y_1 + S_2 Y_2,$$

et l'on voit que la différence

$$X - Y = S_1(X_0 - Y_1) + S_2(X_0 - Y_2)$$

ne serait pas déterminée *à un facteur constant près*. Donc (n° **1**) l'élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ conviendrait à une surface de révolution. Or, nous avons déterminé, au Chapitre III, toutes les solutions de l'équation fondamentale dans le cas des surfaces de révolution, et nous n'avons trouvé, aussi bien pour X et Y que pour φ et f, d'autres expressions que des expressions uniformes. Mais ceci prouve seulement que Y ne peut prendre plusieurs déterminations quand l'élément linéaire est donné, c'est-à-dire que, si les fonctions φ et f sont multiformes, quand on a choisi une détermination pour chacune d'elles, les fonctions X et Y ne peuvent prendre *qu'une seule* de leurs déterminations, si elles en ont plusieurs. Mais on ne peut pas exclure *a priori* l'hypothèse où l'équation fondamentale serait vérifiée par un couple de déterminations X_1, Y_1 de X et Y, avec un couple de déterminations φ_1 et f_1 de φ et f, et aussi par un autre couple de déterminations X_2 et Y_2 avec un second couple de déterminations φ_2 et f_2. Le raisonnement précédent doit donc être rejeté.

3. *Première démonstration.* — Nous nous restreindrons aux fonctions qui n'offrent dans le plan aucune ligne de discontinuité, non plus que leurs dérivées des deux premiers ordres. Soit $\psi(z)$ une fonction multiforme de cette espèce et soit z_0 l'un de ses points critiques. Si l'on part d'un point z avec une détermination $\psi_1(z)$ et qu'on fasse décrire à la variable un chemin fermé entourant z_0, quand on revient en z, la fonction a pris une autre détermination $\psi_2(z)$. Sa dérivée,

ne cessant pas d'être définie par la limite du rapport

$$\frac{\psi(z+h)-\psi(z)}{h},$$

et n'éprouvant pas de discontinuité, sera devenue, quand le contour se ferme, la dérivée de la détermination finale $\psi_2(z)$.

Cela étant, supposons que les fonctions φ et f soient *données*, c'est-à-dire qu'on ait, si elles sont multiformes, adopté pour chacune d'elles une détermination fixe, φ_1 et f_1, pour les valeurs initiales x et y des variables, ainsi qu'une détermination fixe X_0 pour X, si cette fonction n'est pas uniforme. Supposons, d'autre part, que Y soit multiforme et qu'une de ses déterminations Y_1 vérifie l'équation ainsi préparée. Désignons par y_0 l'affixe d'un point critique de Y; nous pouvons écrire

$$\varphi(x+y) = \varphi[(x+y_0)+(y-y_0)],$$
$$f(x-y) = f[(x-y_0)-(y-y_0)];$$

par suite, nous attribuerons à x une valeur constante, telle que le point x ne soit pas critique pour X, X′ et X″, ni le point $t=x+y_0$ pour $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ni le point $z=x-y_0$ pour $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$. Enfin, faisons décrire à y une très petite courbe entourant le point critique y_0. Durant tout ce parcours, la fonction Y et ses dérivées Y′, Y″, étant supposées solutions de l'équation

$$\begin{aligned} &2Y(\varphi''-f'')+3Y'(\varphi'+f')+Y''(\varphi-f)\\ &\quad = 2X(\varphi''-f'')+3X'(\varphi'-f')+X''(\varphi-f), \end{aligned}$$

ne cessent pas de la vérifier. Or, à la fin, Y se trouve avoir changé sa détermination primitive Y_1 en une autre détermination Y_2 et, d'après la remarque initiale, les dérivées Y′, Y″ sont devenues les dérivées Y'_2, Y''_2 de cette détermination finale Y_2. Par contre, d'après les hypothèses faites sur x, les neuf fonctions φ, φ', φ'', f, f', f'', X, X′, X″ n'ont pas changé.

Il suit de là que Y ne peut être multiforme, puisque ses deux déterminations seraient solutions de l'équation fondamentale *pour le même*

élément linéaire, φ et f étant fixés. C'est ce qui a été reconnu impossible (n° **1**).

6. *Seconde démonstration.* — On peut encore prouver notre proposition, grâce à une propriété tout à fait particulière de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques : c'est qu'elle peut être intégrée deux fois, de manière à fournir Y par de simples quadratures, quand les autres fonctions sont considérées comme connues. Écrivons-la, en effet, comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[Y'(\varphi - f) + 2Y(\varphi' + f')\right]\\ = 2X(\varphi'' - f'') + 3X'(\varphi' - f') + X''(\varphi - f),\end{aligned}$$

et intégrons les deux membres par rapport à y; en posant

$$t = x + y, \qquad z = x - y,$$
$$\varphi_0(t) = \int \varphi(t)\,dt, \qquad f_0(z) = \int f(z)\,dz,$$

nous trouvons immédiatement

$$\begin{aligned}Y'(\varphi - f) + 2Y(\varphi' + f')\\ = 2X(\varphi' + f') + 3X'(\varphi + f) + X''(\varphi_0 + f_0) + \xi(x).\end{aligned}$$

La fonction $\xi(x)$ introduite par l'intégration se détermine en donnant à y une valeur constante y_0; on voit qu'elle est composée linéairement avec les fonctions φ_0 et f_0, ainsi que φ et f, φ' et f', X, X' et X''; elle dépend aussi des valeurs b_0 et b'_0 de Y et de Y' au point y_0, que nous supposons être un point ordinaire pour Y.

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par $\varphi - f$; le premier membre devient la dérivée de $Y(\varphi - f)^2$ par rapport à y; intégrons une fois de plus; il vient

$$\begin{aligned}Y(\varphi - f)^2 = X(\varphi - f)^2 + 3X'\left[\int_a^{x+y}\varphi^2(t)\,dt - \int_b^{x-y} f^2(z)\,dz\right]\\ + \frac{X''}{2}(\varphi_0 + f_0)^2 + \xi(x)(\varphi_0 + f_0) + \xi_1(x).\end{aligned}$$

La fonction $\xi_1(x)$ se déterminera en faisant $y = y_0$; elle est composée comme $\xi(x)$ avec les mêmes éléments auxquels s'ajoutent seulement les intégrales de $\varphi^2(t)$ et de $f^2(z)$, prises la première entre a et $x + y_0$, la seconde entre b et $x - y_0$.

Nous obtenons pour Y, en divisant par $(\varphi - f)^2$, une expression dans laquelle x semble figurer, mais qui en est indépendante. Il s'agit de prouver que Y n'a qu'une seule valeur, quand on se donne y. Nous supposerons que les fonctions X, X', X'' et les fonctions φ, φ', f, f' ne présentent pas dans le plan de lignes de discontinuité [1], de sorte que les fonctions φ_0 et f_0 et les deux autres intégrales qui figurent dans l'expression de Y n'en présenteront pas non plus, et nous désignerons par $F(x, y)$ cette expression de Y; puis, laissant x variable, nous attribuerons à y une valeur constante b. Je dis que, b étant donné, Y n'a qu'une valeur.

Comment concevoir que Y passe d'une détermination $Y_1(b)$ à une autre $Y_2(b)$? Cela ne peut arriver que pour deux raisons :

1° Ou bien parce que les fonctions φ_0, f_0, φ, f, φ', f', X, X', X'' sont susceptibles de plusieurs déterminations;

2° Ou bien (et ce cas n'exclut pas le précédent) parce qu'il existe dans le plan des x des lignes de discontinuité pour l'expression $F(x, b)$. Mais cette expression a ses deux termes, numérateur et dénominateur, formés par addition et multiplication de fonctions supposées dépourvues de lignes de discontinuité. Elle ne peut présenter elle-même de pareille ligne, sauf peut-être des lignes le long desquelles elle s'offrirait sous la forme $0:0$.

Soit (γ) une pareille courbe, le long de laquelle le numérateur et le dénominateur $[\varphi(x + b) - f(x - b)]^2$ seraient constamment nuls. Il existera, de part et d'autre de (γ) ou d'un tronçon de (γ), un espace où la détermination de $\varphi - f$ que l'on considère sera holomorphe; par suite, cette différence sera nulle dans toute cette portion finie du plan des x. Si ce fait ne se produit que pour des valeurs isolées de b, il n'importe pas : une fonction Y n'est multiforme que si, en tous les points d'un espace, elle a plusieurs valeurs. Si le fait sub-

---

[1] Nous supposons, de plus, que ces fonctions n'ont que des points critiques isolés.

siste pour des valeurs de b formant un espace, il y a un domaine à deux variables x et y, dans lequel la différence $\varphi - f$ est toujours nulle. Mais, dans cette hypothèse, il n'y a plus de problème, l'équation fondamentale devenant indéterminée en X et Y par l'évanouissement identique de tous ses coefficients.

Reste donc à examiner l'hypothèse que les fonctions $\varphi_0(x+b)$, $f_0(x-b)$, $\varphi(x+b)$, ... ont des déterminations multiples. Si l'on part d'un point x du plan des x avec un système de déterminations, on peut y revenir avec *tout* autre système en décrivant un chemin convenable (c) comprenant un ou plusieurs des points critiques. Quand on passe d'un point de ce contour au point infiniment voisin, l'expression $F(x, b)$ ne varie pas d'une manière continue, sans quoi Y dépendrait de x. Donc, au moins pendant une certaine partie du parcours, F conserve la *même* valeur constante, et, s'il en est ainsi jusqu'au bout, Y est uniforme. Pour que Y passe de sa détermination initiale Y_1 à une autre détermination Y_2, il faut qu'il existe sur la ligne (c) un point M, où la fonction F éprouve une discontinuité brusque. Cela ne peut arriver que si la valeur de x au point M fait prendre à F la forme $0:0$, et, par suite, est un zéro de la fonction

$$\varphi(x+b) - f(x-b).$$

Si ce point est isolé, on l'évitera en décrivant le contour (c). S'il n'en est pas ainsi, les zéros de cette fonction $\varphi(x+b) - f(x-b)$ ne pourront s'accumuler autour du point M, car alors elle ne pourrait être développée en série de Taylor autour de ce point. Ils formeront donc une ligne, ou couvriront un espace, ce que nous avons démontré être impossible.

Remarque. — Nous avons négligé deux hypothèses secondaires sur l'expression $F(x, b)$, qui sont comprises comme cas limites dans l'hypothèse 2°; ce sont : 1° le cas où $F(x, b)$ aurait une *même* valeur constante dans tout le plan des x, et d'autres valeurs constantes sur certaines lignes de ce plan; mais alors ces lignes seraient des lignes de zéros pour la fonction $\varphi(x+b) - f(x-b)$; 2° le cas où $F(x, b)$ aurait une *même* valeur constante dans tout le plan, sauf en certains

points isolés. Il est facile de voir que ces points ne peuvent être que les zéros de la fonction $\varphi(x+b)-f(x-b)$ ou les points critiques des fonctions $\varphi_0(x+b), f_0(x-b), \ldots$.

Si l'un des points critiques rend quelques-unes de ces fonctions infinies, il ne faudra pas donner à x *directement* cette valeur dans l'expression $F(x, b)$, car alors les fonctions susdites perdent toute signification. Si le point critique laisse à ces fonctions des valeurs finies et n'est pas en même temps un zéro de $\varphi(x+b)-f(x-b)$, le mode de composition de $F(x, b)$ montre qu'en ce point précis la valeur de cette expression ne peut différer brusquement de sa valeur constante pour les points voisins. Enfin, s'il s'agit d'un zéro de

$$\varphi(x+b)-f(x-b),$$

lequel peut être en même temps un point critique, on ne devra pas donner à x *directement* cette valeur dans l'expression $F(x, b)$ qui, prenant la forme $0:0$, n'aurait plus de signification [1].

---

[1] [C'est ici le premier des deux seuls passages de ce Mémoire qui soient visés comme imparfaits dans le Rapport de l'Académie (*Comptes rendus*, t. CXX, p. 1122). Le raisonnement du texte a besoin d'être complété. Il prouve seulement que, lorsqu'on assigne à x et à y des valeurs fixes $x=a$, $y=b$, et qu'on choisit pour la fonction Y (momentanément supposée multiforme) une certaine détermination Y_1, quel que soit le chemin qu'on fasse ensuite parcourir *à la variable* x dans son plan pour revenir à son point de départ $x=a$, on retrouvera finalement pour Y la même détermination Y_1. Pour établir complètement l'uniformité de la fonction $Y(y)$, il suffit donc de montrer que tout chemin décrit *par la variable* y dans son plan, partant du point b pour y revenir, peut être remplacé par un chemin convenable décrit par la variable x dans son plan, du point a au point a, tandis que y garde constamment la valeur b.

Soient en effet t_i, z_j les points critiques des diverses fonctions de $t=x+y$ et de $z=x-y$ qui figurent dans l'expression de Y. Quand, ayant pris $x=a$, on fait varier y seulement, les points critiques de ces fonctions ont pour affixes $y_i=t_i-a$, $y_j=a-z_j$. Tout contour fermé passant en b équivaut, comme on sait, à une succession de lacets (Y_i) et (Y_j) joignant le point b aux points y_i et y_j. Désignant par y un point du lacet (Y_i) et par x le point correspondant du chemin (X_i) que nous voulons substituer à (Y_i), on a respectivement le long de ces deux contours

$$t=a+y, \qquad t=x+b.$$

Il suffira donc, pour que t acquière la même suite de valeurs le long de ces

III. — Points essentiels, pôles et périodes.

7. L'expression dont nous venons de faire usage pour montrer l'uniformité de Y met en évidence un autre résultat important : c'est qu'*aucune solution de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques n'admet de point singulier essentiel à distance finie*. Nous avons trouvé

$$Y = \frac{\left\{ \begin{aligned} & X[\varphi(x+y)-f(x-y)]^2 + 3X'\left[\int_a^{x+y}\varphi^2(t)\,dt + \int_b^{x-y} f^2(z)\,dz\right] \\ & \qquad + \frac{X''}{2}(\varphi_0+f_0)^2 + \xi(x)(\varphi_0+f_0) + \xi_1(x) \end{aligned} \right\}}{[\varphi(x+y)-f(x-y)]^2},$$

et reconnu que Y est une fonction uniforme de y. On aura donc sa valeur, pour y donné, en attribuant à x une valeur quelconque. Soit y_1 la valeur considérée ; ayant toujours

$$\varphi(x+y) = \varphi[(x+y_1)+(y-y_1)],$$
$$f(x-y) = f[(x-y_1)-(y-y_1)],$$

---

deux chemins, de poser

$$a+y = x+b, \qquad x = y+a-b.$$

De même, soient (Y_j) un lacet relatif à une fonction de z et (X_j) le chemin qu'on veut lui substituer. Les relations

$$z = a-y, \qquad z = x-b,$$

qui définissent z le long de ces deux contours, montrent que z aura les mêmes valeurs suivant l'un ou suivant l'autre, si l'on fait correspondre les points x de (X_j) aux points y de (Y_j) par la formule

$$a-y = x-b, \qquad x = a+b-y.$$

Il faut évidemment qu'aucun des points $t_i - a$ ne coïncide avec l'un des points $a - z_j$. Mais, si l'on avait $t_i - a = a - z_j$, il suffirait de changer tant soit peu la valeur de a pour qu'il n'en fût plus ainsi.

Enfin, il faut encore qu'aucun des points singuliers $t_i - b$, $z_j + b$ du plan des x ne se confonde avec l'un des points critiques de l'une des fonctions de x seulement qui figurent dans l'expression de Y ; mais, si cela était, il suffirait de changer tant soit peu la valeur de b pour que la coïncidence n'eût plus lieu.]

nous donnerons à x une valeur telle que le point x ne soit pas un pôle pour X, non plus que pour ξ et ξ_1, ni le point $t = x + y_1$ pour $\varphi(t)$, ni le point $z = x - y_1$ pour $f(z)$. Dans ces conditions, les fonctions $\varphi, \ldots, f, \ldots$, que nous savons uniformes, pourront se développer par la formule de Taylor suivant les puissances de $y - y_1$, pourvu que y soit suffisamment voisin de y_1, et il sera permis de réunir en une seule les diverses séries provenant des différents termes du numérateur. Il vient ainsi

$$Y = \frac{X_0 + X_1(y - y_1) + X_2(y - y_1)^2 + \ldots}{\left[\varphi(x + y_1) - f(x - y_1) + (y - y_1)(\varphi' + f') + \frac{(y - y_1)^2}{2}(\varphi'' - f'') + \ldots\right]^2},$$

ce qui montre que le point $y = y_1$ ne peut jamais être un point essentiel pour Y. En effet, si l'on n'a pas

$$\varphi(x + y_1) - f(x - y_1) = 0.$$

le dénominateur reste fini pour $y = y_1$ et le point est un point ordinaire. Dans le cas contraire, c'est un pôle, et je dis que ce pôle est double. C'est évident si l'on n'a pas

$$\varphi'(x + y_1) + f'(x - y_1) = 0.$$

Mais, comme la relation $\varphi - f = 0$ a lieu pour toute valeur de x, sauf certaines valeurs singulières, on en déduit, en la différentiant par rapport à x,

$$\varphi'(x + y_1) - f'(x - y_1) = 0.$$

Cette équation et la précédente entraînent $\varphi = \text{const.}$, $f = \text{const.}$, ce qu'on ne suppose pas. Nous arrivons ainsi à cette conclusion :

Les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques n'ont à distance finie d'autres singularités que des pôles, et chacun de ces pôles est double.

On ferait en effet la même démonstration pour X que pour Y, et la loi de réciprocité suffit pour étendre la même propriété aux fonctions φ et f.

On pourrait d'ailleurs la reconnaître sur l'équation fondamentale elle-même

$$(X'' - Y'')(\varphi - f) + 3X'(\varphi' - f')$$
$$- 3Y'(\varphi' + f') + 2(X - Y)(\varphi'' - f'') = 0,$$

avant toute intégration. Si en effet y_1 est un pôle d'ordre n pour Y, c'est un pôle d'ordre $n + 1$ pour Y', d'ordre $n + 2$ pour Y'', ce qui exige d'abord que l'on ait

$$\varphi(x + y_1) - f(x - y_1) = 0.$$

Alors en développant en série les six fonctions φ, φ', φ'', f, f', f'' ainsi que Y, Y', Y'' suivant les puissances de $y - y_1$ (ce qui est légitime sous les réserves faites un peu plus haut), il suffit d'ordonner le premier membre de l'équation fondamentale suivant les puissances croissantes, négatives et positives de $y - y_1$, pour reconnaître que l'exposant n est nécessairement égal à 2. On voit de plus que *le résidu relatif à tout pôle $y = y_1$ est nul.*

Mais on peut aller plus loin et déduire de l'identité

$$\varphi(x + y_1) = f(x - y_1)$$

des conséquences qui nous serviront. Cette identité ayant lieu quel que soit x, remplaçons x par $x + y_1$; il vient

$$f(x) = \varphi(x + 2y_1),$$

d'où cette expression de λ

$$\lambda = \varphi(x + y) - f(x - y) = \varphi(x + y) - \varphi(x - y + 2y_1),$$

ce qui peut encore s'écrire ainsi

$$\lambda = \varphi[(x + y_1) + (y - y_1)] - \varphi[(x + y_1) - (y - y_1)].$$

Il suffit de poser $y - y_1 = y'$ pour trouver

$$\lambda = \varphi(x + y' + y_1) - \varphi(x - y' + y_1);$$

c'est-à-dire qu'il a suffi de transporter l'origine des y au pôle y_1 de la fonction Y pour que la fonction f devienne la même fonction de $x-y$ que φ de $x+y$. Cela fait, je dis que la fonction Y est une fonction paire de la nouvelle variable y. Introduisons en effet l'hypothèse $f(w)=\varphi(w)$ dans l'expression générale trouvée pour Y; il vient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Y}[\varphi(t)-\varphi(z)]^2\\
&\quad=\mathrm{X}[\varphi(t)-\varphi(z)]^2+3\mathrm{X}'\left[\int_a^{x+y}\varphi^2(t)\,dt+\int_b^{x-y}\varphi^2(z)\,dz\right]\\
&\qquad+\frac{\mathrm{X}''}{2}[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)]^2+\xi(x)[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)]+\xi_1(x),
\end{aligned}$$

et l'on voit que le changement de y en $-y$, qui revient à l'échange de t avec z et de z avec t, ne modifie pas Y.

Si l'on suppose que la fonction X ait un pôle x_1, on trouvera comme précédemment

$$\varphi(x_1+y)=f(x_1-y),$$

d'où l'on conclut $\varphi(y)=f(2x_1-y)$ et par suite

$$\begin{aligned}
\lambda&=f(2x_1-x-y)-f(x-y)\\
&=f[(x_1-x)-(y-x_1)]-f[-(x_1-x)-(y-x_1)].
\end{aligned}$$

Si donc on pose $x_1-x=x'$ et si, pour abréger l'écriture, on fait $x_1-y=y'$, il vient

$$\lambda=f(x'+y')-f(-x'+y').$$

Il suffira donc d'échanger x' et y' pour ramener les deux fonctions φ et f à être les mêmes. Les pôles de Y et ceux de X ont donc ce caractère commun, qu'en y transportant l'origine et échangeant (pour ceux de X) les noms des variables, on ramène les deux fonctions φ et f à être les mêmes. Cette propriété peut s'énoncer autrement. En effet, les deux relations de départ

$$\varphi(x+y_1)=f(x-y_1),\qquad \varphi(x_1+y)=f(x_1-y)$$

entraînent l'une et l'autre cette conséquence que $f'^2(w)$ est la même

fonction de $f(w)$ que $\varphi'^2(w)$ de $\varphi(w)$. Nous dirons donc : *Si l'une des fonctions* X *et* Y *a un pôle à distance finie, la fonction f'^2 s'exprime en f comme φ'^2 en φ.* La loi de réciprocité permet d'ajouter : *Si l'une des fonctions φ et f admet un pôle à distance finie,* X'^2 *s'exprime en* X *comme* Y'^2 *en* Y. Nous conviendrons de dire que les fonctions φ et f *ne sont pas distinctes* quand f'^2 s'exprime en f comme φ'^2 en φ, et qu'*elles sont distinctes* dans le cas contraire; de même pour X et Y.

Nous allons maintenant classer les solutions d'après leurs pôles et leurs périodes. A cet effet, reportons-nous à l'expression de Y telle qu'elle a été particularisée dans l'hypothèse $f(w) = \varphi(w)$. On a

$$\begin{aligned} &Y[\varphi(t)-\varphi(z)]^2 \\ &\quad = X[\varphi(t)-\varphi(z)]^2 + 3X'\left[\int_a^{x+y}\varphi^2(t)\,dt + \int_b^{x-y}\varphi^2(z)\,dz\right] \\ &\qquad + \frac{X''}{2}[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)]^2 + \xi(x)[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)] + \xi_1(x). \end{aligned}$$

Cette expression montre que, quand les deux fonctions φ et f ne sont pas distinctes, si elles admettent la période 2ω, Y et par suite X admettent la même période 2ω (ou une de ses parties aliquotes). En effet, si les intégrales

$$\varphi_0(w) = \int \varphi(w)\,dw, \qquad \psi(w) = \int \varphi^2(w)\,dw$$

ne sont pas périodiques, elles se composeront chacune d'une partie périodique et d'un terme linéaire en w. Or, si l'on effectue les sommes $\varphi_0(x+y)+\varphi_0(x-y)$ et $\psi(x+y)+\psi(x-y)$, les parties non périodiques seront chacune de la forme $m(x+y)+m(x-y)$, c'est-à-dire indépendantes de y. Donc Y admet la période 2ω.

Théorème. — *Si l'une des quatre fonctions* X, Y, φ *et* f *admet plus d'un pôle à distance finie, les quatre fonctions sont périodiques; si l'une d'elles admet trois pôles formant un triangle, toutes les quatre sont doublement périodiques; si l'une d'elles n'a qu'un seul pôle à distance finie, les trois autres n'en ont pas davantage.*

Supposons par exemple que la fonction Y ait deux pôles à distance finie. En transportant l'origine des y en l'un de ces pôles, on rend les fonctions φ et f identiques. Soit alors ω l'affixe du second pôle. D'après une remarque déjà faite, l'équation fondamentale ne peut être vérifiée pour $y = \omega$ que si le coefficient de $X'' - Y''$ est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi(x + \omega) = \varphi(x - \omega),$$

puisqu'ici $f(w) = \varphi(w)$, et cela quel que soit x. En conséquence la fonction φ admet la période 2ω, qui, en vertu du lemme, appartiendra aussi à Y et à X.

Le même raisonnement prouve que, si Y présente trois pôles $y = 0$, $y = \omega$, $y = \omega'$ formant un triangle, la fonction φ admet les périodes 2ω et $2\omega'$; donc aussi Y et X les admettent.

Enfin, si Y n'admet qu'un pôle à distance finie, les autres fonctions n'en ont pas davantage (elles pourraient n'en pas avoir); si l'une d'elles en effet en admettait deux, les quatre fonctions seraient périodiques, donc aussi en particulier Y, qui aurait plus d'un pôle à distance finie.

IV. — Solutions doublement périodiques.

8. Théorème. — *Tout élément linéaire doublement harmonique et doublement périodique rentre dans le type de M. Darboux*

$$ds^2 = [\varphi(t - t_0) - \varphi(z - z_0)]\, dx\, dy,$$

où l'on a posé

$$\varphi(w) = \frac{A}{\operatorname{sn}^2 mw} + B \operatorname{sn}^2 mw + C \frac{\operatorname{dn}^2 mw}{\operatorname{cn}^2 mw} + D \frac{\operatorname{cn}^2 mw}{\operatorname{dn}^2 mw} + E.$$

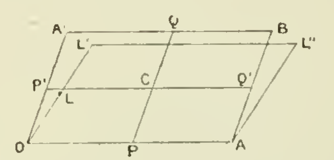
Nous supposons doublement périodique l'une des fonctions φ et f, la dernière par exemple. Comme elle présente à distance finie des pôles formant réseau, des raisonnements déjà faits (¹) prouvent d'abord

(¹) *Voir* l'article précédent : *Points essentiels, pôles et périodes.*

que les fonctions X et Y ne sont pas distinctes, de plus, qu'elles sont doublement périodiques; dès lors X et Y ont des pôles, ce qui exige que les fonctions f et φ ne soient pas distinctes. Nous allons chercher $\varphi(z)$.

Supposons marqués dans le plan des z tous les pôles de la fonction $\varphi(z)$. Nous en choisirons trois (d'affixes z_0, $z_0+\omega$, $z_0+\omega'$) qui déterminent un triangle d'aire minima.

La différence des affixes de deux pôles quelconques étant une demi-période, le parallélogramme dont les côtés OA et OA' sont les doubles



de OP et de OP' est un parallélogramme de périodes et un parallélogramme *élémentaire*, ou d'aire minima. Les sommets O, A, B, A' sont des pôles, ainsi que les milieux P, Q', P', Q de ses côtés, à raison de la double périodicité. Je dis qu'*il ne peut contenir d'autre pôle que son centre* C.

D'après une propriété que nous venons de rappeler, étant donnés deux pôles, le symétrique de chacun d'eux par rapport à l'autre est aussi un pôle. Il suit de là que sur le périmètre OABA'O il ne peut exister d'autres pôles que ceux que nous connaissons déjà, sans quoi le parallélogramme ne serait pas élémentaire. Il n'y en a pas non plus à l'intérieur, car, de L, par exemple, on déduirait L' et le parallélogramme OL'L''A, d'aire moindre que le proposé. Si L était sur une des médianes, L' serait sur le périmètre, ce qui ne se peut.

Cela posé, la fonction $\varphi(z)$ ne peut avoir dans un parallélogramme de périodes $(2\omega, 2\omega')$ plus de quatre pôles,

$$z_0, \quad z_0+\omega, \quad z_0+\omega', \quad z_0+\omega+\omega'.$$

Chacun de ces pôles est *double* et a son *résidu nul*. La fonction $\varphi(z)$ n'ayant pas de point essentiel à distance finie, on peut appliquer la formule de décomposition des fonctions doublement périodiques, due à

M. Hermite. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(z - z_0) = {} & A\frac{d}{dz}\zeta(z - z_0) \\ & + B\frac{d}{dz}\zeta(z - z_0 - \omega) + C\frac{d}{dz}\zeta(z - z_0 - \omega) \\ & + D\frac{d}{dz}\zeta(z - z_0 - \omega - \omega') + E,\end{aligned}$$

expression qui ne diffère que par la forme de celle de M. Darboux.

L'élément linéaire correspondant

$$ds^2 = [\varphi(t - t_0) - \varphi(z - z_0)]\,dx\,dy$$

dépend de huit constantes arbitraires A, B, C, D, ω, ω', t_0 et z_0. Les deux périodes 2ω, $2\omega'$, prises comme arbitraires, remplacent le module k et le multiplicateur m de la formule primitivement écrite pour $\varphi(w)$.

Remarque. — Si le point C n'est pas un pôle, il n'y en aura que trois. Si l'une ou l'autre des périodes peut être réduite de moitié, $\varphi(z)$ n'aura plus que deux pôles; enfin, si ω et ω' sont des périodes, il n'y a plus qu'un pôle double, comme dans l'élément linéaire des surfaces à courbure totale constante.

V. — Achèvement du problème.

9. Nous allons faire servir à la recherche des éléments linéaires doublement harmoniques une remarque très simple, mais importante. L'équation fondamentale

$$\begin{aligned}& 2(X - Y)(\varphi'' - f'') + 3X'(\varphi' - f') \\ & \quad - 3Y'(\varphi' + f') + (X'' - Y'')(\varphi - f) = 0\end{aligned}$$

exprime que, partant de l'élément linéaire

$$ds^2 = [\varphi(x + y) - f(x - y)]\,dx\,dy$$

et opérant le changement de variables

$$d\xi = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad d\eta = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

on a identiquement

$$[\varphi(x+y) - f(x-y)]\sqrt{XY} = \varphi_1(\xi+\eta) - f_1(\xi-\eta),$$

ou que l'élément linéaire considéré conserve la forme harmonique. Dès lors il est évident que, partant de

$$ds^2 = [\varphi_1(\xi+\eta) - f_1(\xi-\eta)]\,d\xi\,d\eta,$$

et opérant le changement de variables

$$dx = \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi(\xi)}}, \qquad dy = \frac{d\eta}{\sqrt{H(\eta)}},$$

inverse du précédent moyennant les hypothèses

$$X(x)\,\Xi(\xi) = 1, \qquad Y(y)\,H(\eta) = 1,$$

on retrouvera l'élément linéaire primitif $(\varphi - f)\,dx\,dy$. Ainsi les fonctions $\Xi(\xi)$ et $H(\eta)$ concourent avec $\varphi_1(\xi+\eta)$ et $f_1(\xi-\eta)$ à former une solution de l'équation fondamentale. Mais nous avons démontré que toutes les solutions de cette équation sont uniformes. Ainsi, de même que $X(x)$ est uniforme en x, la fonction $\Xi(\xi)$ est uniforme en ξ. Or elle est égale à l'inverse de $X(x)$. Donc $X(x)$ est une fonction uniforme de ξ comme de x, et nous arrivons à cette conclusion :

Les fonctions $X(x)$ qui concourent à former des solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques doivent être cherchées parmi les fonctions uniformes de x qui deviennent des fonctions uniformes de ξ par le changement de variable

$$d\xi = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}.$$

Étudions les fonctions qui satisfont à cette double obligation d'être uniformes en x et uniformes en ξ. Nous allons voir que ce sont, en général, des fonctions périodiques et nous discuterons les cas dans lesquels certaines périodes ou toutes les périodes disparaissent.

A cet effet, considérons l'intégrale définie qui représente ξ

$$\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X(x)}},$$

et soit $\xi_1(x)$ la valeur qu'elle acquiert quand, partant de $x = x_0$ avec une détermination du radical, on fait décrire à x un chemin déterminé (chemin 1). Allons maintenant de x_0 en x_0 par un chemin qui entoure diverses racines (¹) de X, mais qui ramène la détermination initiale du radical; si l'on va ensuite de x_0 en x par le chemin 1, on aura

$$\xi = mA + nB + \ldots + \xi_1(x),$$

les A, B, ... étant des périodes. Or la fonction

$$\Xi(\xi) = \frac{1}{X(x)}$$

est uniforme, qu'on l'exprime en ξ ou qu'on l'exprime en x. Donc, étant donné x, elle n'a qu'une seule valeur; or elle se présente, selon que x a décrit le chemin 1 ou le suivant, sous les deux formes

$$\frac{1}{X(x)} = \Xi(\xi_1), \qquad \frac{1}{X(x)} = \Xi(\xi_1 + mA + nB + \ldots).$$

On doit donc avoir

$$\Xi(\xi_1 + mA + nB + \ldots) = \Xi(\xi_1),$$

(¹) Les fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ peuvent toujours être supposées avoir des racines, puisque nous avons établi qu'elles n'ont de point essentiel qu'à l'infini. Si elles n'avaient pas de zéros, on les remplacerait par $X - h$, $Y - h$ et les nouvelles équations $X - h = 0$, $Y - h = 0$ auraient nécessairement des racines, en vertu d'un important théorème, découvert par M. Picard.

ce qui prouve à la fois que la fonction Ξ est périodique et que ses périodes A, B, ... se réduisent à deux au plus.

Nous pouvons raisonner de même sur la fonction x,

$$x = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi(\xi)}}.$$

Si x_1 est l'une de ses valeurs, un chemin d'intégration convenable donnera

$$x = x_1(\xi) + \mu\alpha + \nu\beta + \ldots,$$

les α, β, ... étant des périodes; et l'on verra, comme tout à l'heure pour $\Xi(\xi)$, que la fonction $X(x)$ est périodique. En conséquence, *les fonctions $\Xi(\xi)$ et $X(x)$ sont des fonctions uniformes de leur argument et admettent, en général, deux périodes.* Nous aurons à tenir compte de leurs dégénérescences, d'où trois cas principaux à examiner, suivant que l'une d'elles a deux périodes, n'en a qu'une, ou n'en a aucune.

10. Premier cas : $\Xi(\xi)$ a deux périodes.

Trois hypothèses à faire, suivant que $X(x)$ a deux périodes, n'en a qu'une, ou n'en a pas. Dans les trois hypothèses, nous avons toujours

$$(1) \qquad \xi = mA + nB + \xi_1(x),$$

et, si l'on fait précéder le chemin 1, qui donne $\xi_1(x)$, d'un chemin qui échange les deux déterminations de $\sqrt{X(x)}$ au point initial x_0, on aura

$$(2) \qquad \xi = m'A + n'B + 2L - \xi_1(x),$$

en désignant par $2L$ l'intégrale ξ prise suivant un lacet. Les formules (1) et (2) fournissent toutes les valeurs de ξ pour une valeur donnée de x. On peut les écrire

$$\xi - L = mA + nB - [L - \xi_1(x)],$$
$$\xi - L = m'A + n'B + [L - \xi_1(x)].$$

On en conclut que la fonction $p(\xi - L)$ aux périodes A et B est une fonction uniforme de x.

Dans tous les cas qui vont suivre, nous aurons à reproduire un même raisonnement, que nous allons faire une fois pour toutes. Supposons qu'une certaine fonction uniforme de ξ, $U_1(\xi)$ soit une fonction uniforme de x, et qu'une certaine fonction uniforme de x, $U(x)$, soit une fonction uniforme de ξ. On voit que U_1 est une fonction de U. De plus, les fonctions que nous considérerons peuvent prendre *toutes* les valeurs. Or, x étant donné, U est déterminée et U_1 n'a qu'une seule valeur. C'est dire que la relation $F(U, U_1) = 0$, qui lie U et U_1, est telle que, quand U est connue, U_1 n'a qu'une seule valeur. Elle est telle aussi que, quand U_1 est donnée, U n'a qu'une seule valeur. Ainsi, les variables U et U_1 sont des fonctions uniformes l'une de l'autre, et cela quelque valeur qu'on attribue à chacune d'elles. Dès lors, on sait qu'elles ne peuvent être liées que par une relation bilinéaire (homographique)

$$CUU_1 + AU + BU_1 + D = 0,$$

dont les coefficients sont des constantes [1].

---

[1] [C'est ici le second point visé par le rapport de l'Académie. Le raisonnement du texte est incorrect, mais l'existence d'une relation homographique entre les fonctions considérées, telles que $p(\xi - L)$ et $p(x - \lambda)$, n'est pas contestable. Rien n'est plus facile que de l'établir rigoureusement comme il suit.

Les formules (1) et (2) peuvent être remplacées par une seule :

$$\text{(I)} \qquad \xi - L = mA + nB \pm [\xi_1(x) - L].$$

Dans le cas le plus général, celui où $X(x)$ admet deux périodes, on aura pareillement

$$\text{(II)} \qquad x - \lambda = \mu\alpha + \nu\beta \pm [x_1(\xi) - \lambda].$$

A toutes les valeurs de x fournies par la formule (II) *pour le même x_1 ne correspondent pas d'autres valeurs de ξ que celles qui sont données par la formule* (I) *pour un même ξ_1; et réciproquement.*

Pour le voir, choisissons deux arguments dans la suite (II), par exemple

$$x' = \lambda + \mu'\alpha + \nu'\beta + (x_1 - \lambda), \qquad x'' = \lambda + \mu''\alpha + \nu''\beta + (x_1 - \lambda).$$

Soient ξ' l'une des valeurs de ξ qui correspondent à x' et ξ'' l'une de celles

Cela posé, examinons les trois hypothèses du premier cas.

Première hypothèse. — L'intégrale x a deux périodes α, β. Ses diverses valeurs pour une valeur donnée de x se répartissent en deux séries

$$(3) \qquad x = \mu\alpha + \nu\beta + x_1(\xi),$$

$$(4) \qquad x = \mu\alpha + \nu\beta + 2\lambda - x_1(\xi),$$

dont l'origine est bien connue. Nous les écrirons ainsi :

$$x - \lambda = \mu\,\alpha + \nu\,\beta - [\lambda - x_1(\xi)],$$
$$x - \lambda = \mu'\alpha + \nu'\beta + [\lambda - x_1(\xi)].$$

---

qui correspondent à ξ''. A l'argument ξ' correspond pour x une série de valeurs dont x' fait partie; cette série est donc

$$(\text{II})' \qquad \lambda + \mu\alpha + \nu\beta \pm (\mu'\alpha + \nu'\beta + x_1 - \lambda).$$

A l'argument ξ'' correspond pour x une série de valeurs dont x'' fait partie; cette série est donc

$$(\text{II})'' \qquad \lambda + \mu\alpha + \nu\beta \pm (\mu''\alpha + \nu''\beta + x_1 - \lambda).$$

Les deux séries (II)′ et (II)″ ont en commun l'argument x_1. Puisque la valeur x_1 figure parmi les valeurs de x qui correspondent soit à ξ', soit à ξ'', on a nécessairement

$$\xi' - \text{L} = m'\text{A} + n'\text{B} \pm [\xi_1(x_1) - \text{L}],$$
$$\xi'' - \text{L} = m''\text{A} + n''\text{B} \pm [\xi_1(x_1) - \text{L}].$$

Rien n'est changé, si x'' est de la forme $\lambda + \mu''\alpha + \nu''\beta - (x_1 - \lambda)$. On fera le même raisonnement sur ξ pour établir la réciproque. On voit par là que, si l'on donne à x toutes les valeurs (II), qui correspondent à une même valeur de la fonction $p(x - \lambda)$ aux périodes α et β, la fonction $p(\xi - \text{L})$ aux périodes A et B n'aura qu'une seule valeur, et réciproquement; en sorte que *ces deux fonctions sont liées par une relation homographique.*

La correspondance entre les valeurs de x et celles de ξ subsiste quel que soit le nombre des périodes qui disparaissent, même si les doubles signes disparaissent aussi. Il existera donc, dans les divers cas de la discussion qui va suivre, une relation homographique entre l'une des fonctions $p(\xi - \text{L})$, $\sin^2(\xi - \text{L})$, $\text{tang}(\xi - \text{L})$ ou $e^{\xi - \text{L}}$, $(\xi - \text{L})^2$, $\xi - \text{L}$ d'une part, et l'une des fonctions $p(x - \lambda)$, $\sin^2(x - \lambda)$, $\text{tang}(x - \lambda)$ ou $e^{x-\lambda}$, $(x - \lambda)^2$, $x - \lambda$ d'autre part.]

On voit que la fonction $p(x-\lambda)$, aux périodes α et β, est une fonction uniforme de ξ. Il résulte du raisonnement qui vient d'être exposé, que les deux fonctions $p(\xi-L)$ et $p(x-\lambda)$ sont liées par une relation homographique. Soit donc

$$p(\xi-L)=h+\frac{g}{A_1 p(x-\lambda)+B_1}.$$

Il suffit de différentier et d'éliminer $p(\xi-L)$, pour trouver

$$X(x)=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2=\frac{Ap^4(x-\lambda)+Bp^3(x-\lambda)+Cp^2(x-\lambda)+Dp(x-\lambda)+E}{4p^3(x-\lambda)-g_2 p(x-\lambda)-g_3}.$$

C'est l'expression de X que nous avons obtenue (Chap. II), à propos des surfaces à courbure constante. Elle contient huit constantes : les trois coefficients de la transformation homographique, les deux invariants g'_2, g'_3 de $p(\xi-L)$, les deux invariants g_2, g_3 et le paramètre λ de la fonction $p(x-\lambda)$. Il est clair que $\Xi(\xi)$ a une expression exactement de même forme.

Deuxième hypothèse. — L'intégrale x n'a qu'une période α. Les formules (3) et (4), où maintenant β ne figure plus, montrent que $\sin^2(x-\lambda)$ est une fonction uniforme de ξ (car on peut supposer α égal à π).

C'est ce qu'on déduirait aussi de $p(x-\lambda)$ par dégénérescence. Nous concluons ici que $p(\xi-L)$ et $\sin^2(x-\lambda)$ sont liés par une relation homographique :

$$p(\xi-L)=h+\frac{g}{A_1\sin^2(x-\lambda)+B_1}.$$

Différentiant et éliminant $p(\xi-L)$, on trouve

$$X=\frac{A\sin^8 x+B\sin^6 x+C\sin^4 x+D\sin^2 x+E}{\sin^2 x\cos^2 x},$$

en négligeant λ. C'est l'expression déjà trouvée (Chap. II) à propos des surfaces à courbure constante. Quant à $\Xi(\xi)$, son expression est,

comme dans l'hypothèse précédente, de la forme

$$\Xi(\xi) = \frac{A_2 p^4(\xi - L) + B_2 p^3(\xi - L) + C_2 p^2(\xi - L) + D_2 p(\xi - L) + E_2}{4p^3(\xi - L) - g'_2 p(\xi - L) - g'_3};$$

mais elle dépend d'une constante de moins, puisqu'au lieu de deux périodes de x (ou deux invariants g_2, g_3) il n'y en a plus qu'une.

Il peut arriver aussi que tous les chemins d'intégration suivis par ξ donnent une seule série de valeurs pour x, savoir

$$x = \mu\alpha + x_1(\xi).$$

Alors $p(\xi - L)$ et $\tang x$ (car on peut supposer $\alpha = \pi$) sont liés par une relation homographique, d'où l'on déduit sans peine

$$X(x) = A\sin^4 x + B\sin^3 x\cos x \\ + C\sin^2 x\cos^2 x + D\sin x\cos^3 x + E\cos^4 x,$$

avec cinq arbitraires. L'expression de $\Xi(\xi)$ est de même forme que quand $\sin^2(x - \lambda)$ est uniforme en ξ.

Troisième hypothèse. — L'intégrale x n'a pas de période. Les formules générales (3) et (4) se réduisent actuellement à

$$x = x_1(\xi), \qquad x = 2\lambda - x_1(\xi);$$

ce qu'on peut écrire

$$x - \lambda = -[\lambda - x_1(\xi)], \qquad x - \lambda = +[\lambda - x_1(\xi)].$$

On voit que $(x - \lambda)^2$ est une fonction uniforme de ξ. Par suite, $p(\xi - L)$ et $(x - \lambda)^2$ sont liés par une relation homographique, que nous écrirons, en négligeant λ :

$$p(\xi - L) = h + \frac{g}{A_1 x^2 + B_1}.$$

C'est d'ailleurs ce qu'on obtiendrait par la dégénérescence non périodique de $p(x - \lambda)$. Cette relation, différentiée, donne, par élimi-

nation de $p(\xi - L)$,

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{Ax^8 + Bx^6 + Cx^4 + Dx^2 + E}{x^2}.$$

Les cinq coefficients du numérateur sont arbitraires, la relation homographique donnant trois indéterminées auxquelles s'ajoutent les deux invariants g'_2 et g'_3 de $p(\xi - L)$; une sixième arbitraire est la constante négligée λ. Nous trouvons pour X une expression déjà obtenue (Chap. II) à propos des surfaces à courbure constante. L'expression correspondante de $\Xi(\xi)$ rentre dans celle que nous avons déjà écrite, comme étant de même forme et contenant moins d'arbitraires.

Mais l'intégrale x n'ayant pas de période, il peut ne pas exister de chemin au bout duquel la détermination choisie pour $\sqrt{\Xi(\xi)}$ se reproduise changée de signe. C'est dire que la fonction x est une fonction uniforme de ξ. Alors $p(\xi - L)$ et x sont liés par une relation homographique

$$p(\xi - L) = h + \frac{g}{A_1 x + B_1},$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

avec cinq indéterminées provenant, trois de la relation homographique, deux des invariants de $p(\xi - L)$. C'est là encore une expression de X, qui s'est présentée (Chap. II) à propos des surfaces à courbure constante. L'expression correspondante de $\Xi(\xi)$ rentre encore dans le type primitivement considéré.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur le Tableau du Chapitre II qui se rapporte aux surfaces à courbure totale constante, mais non nulle, pour voir que nous venons de retrouver les cinq formes de $X(\xi)$ qui y figurent. Les cinq expressions correspondantes de $\Xi(\xi)$ ne diffèrent pas de celle qui est inscrite pour X dans ce Tableau, sous le n° (V).

11. Deuxième cas : $\Xi(\xi)$ n'a qu'une période.

Dans ce second cas, nous n'avons pas à supposer $X(x)$ doublement

périodique, ce qui nous ramènerait (sauf échange de ξ en x et de x en ξ) à la seconde hypothèse du premier cas. Notre discussion se trouve ainsi abrégée. Nous commencerons par rappeler les formules (1) et (2) qui deviennent ici

$$\xi - L = mA - [L - \xi_1(x)],$$
$$\xi - L = m'A + [L - \xi_1(x)].$$

En prenant, ce qui est permis, $A = 2\pi$, on voit que $\sin^2(\xi - L)$ est une fonction uniforme de x. Si la seconde série de valeurs de ξ disparaît, c'est-à-dire si tous les chemins suivis par x donnent seulement

$$\xi = mA + \xi_1(x),$$

on fera $A = 2i\pi$ et l'on verra que e^ξ est une fonction uniforme de x. Cela étant, supposons successivement que $X(x)$ n'a qu'une période, puis qu'elle n'en a pas.

Première hypothèse. — L'intégrale x n'a qu'une période α. Si les divers chemins suivis par ξ donnent deux séries de valeurs pour x, nous aurons, par les formules (3) et (4),

$$x - \lambda = 2\mu\pi - [\lambda - x_1(\xi)],$$
$$x - \lambda = 2\mu'\pi + [\lambda - x_1(\xi)],$$

en appelant 2π la période, ce qui est permis. Donc $\sin^2(x - \lambda)$ est une fonction uniforme de ξ et il existe une relation homographique entre $\sin^2(x - \lambda)$ et $\sin^2(\xi - L)$ ou bien entre $\sin^2(x - \lambda)$ et e^ξ.

Soit d'abord, en négligeant L et λ,

$$\sin^2\xi = h + \frac{g}{A\sin^2 x + B}.$$

Nous tirons de là

$$X = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(M\sin^4 x + N\sin^2 x + P)(A\sin^2 x + B)^2}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

et une expression absolument de même forme pour $\Xi(\xi)$. Ces deux

expressions rentrent dans un type déjà signalé (1er cas, 2e *hypothèse*).

Soit maintenant

$$\sin^2 x = h + \frac{g}{Ae^\xi + B}.$$

En différentiant et éliminant ξ, nous trouvons

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(\sin^2 x - h)^2(P\sin^2 x + Q)^2}{\sin^2 x \cos^2 x},$$

expression qui rentre dans le même type que la précédente. Introduisant ξ au lieu de x, nous avons

$$\Xi(\xi) = \frac{(Me^{2\xi} + Pe^\xi + Q)(Ae^\xi + B)^2}{e^{2\xi}},$$

ce qui donne, après changement de ξ en $2ix$, un polynome homogène et du quatrième degré en $\sin x$ et $\cos x$, compris dans un type déjà rencontré (1er cas, à la fin).

Il faut maintenant supposer que tous les chemins suivis par ξ ne donnent pour x qu'une seule série de valeurs

$$x = \mu\alpha + x_1(\xi).$$

Si l'on prend $\alpha = 2i\pi$, ce qui est permis, on voit que e^x est une fonction uniforme de ξ. Il n'y a pas lieu de supposer $\sin^2(\xi - L)$ fonction uniforme de x : ce serait l'hypothèse précédente, sauf échange de x en ξ et de ξ en x. On fera donc

$$e^x = h + \frac{g}{Ae^\xi + B}.$$

Cette relation étant de même forme par rapport à x et à ξ, il suffit de calculer $X(x)$. On trouve aisément

$$X(x) = \frac{(Me^x + P)(Ae^x + B)^2}{e^{2x}}.$$

Cette expression est comprise dans celle que nous venons d'obtenir

pour Ξ. D'ailleurs, $\Xi(\xi)$ a exactement la même forme. Nous avons épuisé la première hypothèse du second cas.

Deuxième hypothèse. — L'intégrale x n'a pas de période. On a vu qu'alors x^2 ou x est une fonction uniforme de ξ (1er cas, 3e *hypothèse*). Il suit de là qu'il existe une relation homographique entre $\sin^2(\xi - L)$ ou e^ξ et x^2 ou x.

1° Soit d'abord, en négligeant L,

$$\sin^2\xi = h + \frac{g}{Ax^2 + B}.$$

Cette équation donne

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = Mx^2 + P + \frac{Q}{x^2},$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = M_1 + \frac{P_1}{\sin^2\xi} + \frac{Q_1}{\cos^2\xi}.$$

Ce sont là, parmi les six formes de $X(x)$ qui correspondent aux développables (Chap. II), les deux seules qui ne rentrent pas dans celles que donnent pour la même fonction les surfaces à courbure totale. Comme le montre le Tableau placé au début du Chapitre, dans les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques déduites par réciprocité de celles qui sont déterminées au Chapitre II, toutes les expressions de X rentrent, soit dans les deux que nous venons d'écrire, soit dans les cinq relatives aux surfaces à courbure constante. Ainsi nous avons dès maintenant retrouvé toutes les formes que nous connaissions déjà pour X. Il ne s'en présentera pas de nouvelle dans la suite de notre discussion.

2° Soit maintenant

$$\sin^2\xi = h + \frac{g}{Ax + B}.$$

Cette équation conduit à

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = (Mx^2 + Px + Q)(Ax + B)^2,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{M_1(\sin^2\xi - h)^2}{\sin^2\xi\cos^2\xi},$$

expressions qui rentrent dans des types déjà rencontrés.

3° Nous arrivons à l'exponentielle e^ξ. Soit d'abord

$$e^\xi = h + \frac{g}{Ax^2 + B}.$$

De cette équation on tire

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(Mx^2 + P)^2(Ax^2 + B)}{x^2},$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{(M_1 e^\xi + P_1)^2(e^\xi - h)^2}{e^{2\xi}},$$

expressions qui rentrent également dans des types déjà rencontrés.

4° Soit enfin, pour achever l'examen du second cas,

$$e^\xi = h + \frac{g}{Ax + B}.$$

On déduit de cette relation

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = (Mx + P)^2(Ax + B)^2,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{M_1(e^\xi - h)^4}{e^{2\xi}}.$$

Ce sont là encore des formes particulières de solutions déjà obtenues.

12. Troisième cas : $\Xi(\xi)$ n'a pas de période.

D'après ce que nous avons déjà vu, ξ^2 ou ξ est une fonction uniforme de x. On doit supposer $X(x)$ sans aucune période; autrement, on serait ramené (sauf échange de ξ avec x) à l'un des cas déjà examinés. En conséquence, x^2 ou x est une fonction uniforme de ξ et il existe une relation homographique entre ξ^2 ou ξ et x^2 ou x.

1° Soit d'abord

$$\xi^2 = h + \frac{g}{Ax^2 + B}.$$

Cette équation conduit à des expressions de même forme exacte-

ment, aux coefficients près, pour $X(x)$ et $\Xi(\xi)$. Le calcul donne

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(Mx^2+P)(Ax^2+B)^3}{x^2}.$$

2° Soit à présent

$$\xi^2 = h + \frac{g}{Ax+B}.$$

On déduit de là

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = (Mx+P)(Ax+B)^3,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = M_1 \frac{(\xi^2-h)^4}{\xi^2}.$$

3° Quand ξ est uniforme en x, il n'y a pas lieu d'établir une relation homographique entre ξ et x^2. C'est, aux notations près, ce qui vient d'être fait. Soit donc

$$\xi = h + \frac{g}{Ax+B}.$$

Cette relation donne

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = M(Ax+B)^4,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = M_1(\xi-h)^4.$$

On voit que toutes les expressions de X et de Ξ obtenues dans le troisième cas rentrent dans des types déjà rencontrés.

15. Arrivés au terme de notre discussion, nous reconnaissons que le problème fonctionnel, en apparence fort indéterminé, que nous nous proposions, n'admet que des solutions dont les formes analytiques sont parfaitement déterminées, et où il ne reste d'arbitraire que certaines constantes, en nombre restreint, huit au plus. Ce problème admet comme solutions *toutes* les fonctions X que nous connaissions déjà comme concourant à former des solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques et il n'en a *pas d'autres*. C'est ce qui ressort de la discussion même.

Mais nous avons aussi acquis un autre résultat important, c'est que

toute solution du problème est une fonction rationnelle, soit de $p(x)$, *soit de* e^{mx}, *soit de* x *lui-même*. Il en est donc de même de toute solution X de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques; et la loi de réciprocité nous apprend que les formes analytiques des fonctions $\varphi(x+y)$, $f(x-y)$ ne seront pas différentes de celles de X, qui sont aussi celles de Y.

La détermination complète de tous les éléments linéaires doublement harmoniques est donc ramenée dès maintenant à une simple question de calcul. Dans l'équation fondamentale

$$\begin{aligned}(X''-Y'')(\varphi-f)+3X'(\varphi'-f')\\ -3Y'(\varphi'+f')+2(X-Y)(\varphi''-f'')=0,\end{aligned}$$

on substituera les diverses expressions qui viennent d'être trouvées pour X, pour Y, pour φ et pour f, en les combinant de toutes les manières possibles, et on déterminera les constantes restées arbitraires dans ces expressions de manière à vérifier, quels que soient x et y, l'équation proposée. C'est là une pure question d'Algèbre, qui ne présente aucune difficulté, puisque dans chaque cas les inconnues sont en nombre limité, assez restreint même. Mais elle semblerait exiger d'assez longs développements, à raison du nombre des cas à traiter. Nous allons voir qu'on peut réduire dans une proportion considérable les calculs à effectuer.

Écartons d'abord les cas où l'on combinerait une fonction $\varphi(x+y)$ et une fonction $f(x-y)$ telles que l'élément linéaire $(\varphi-f)\,dx\,dy$ convînt à une surface de révolution (développables et surfaces à courbure constante comprises). Nous connaissons les solutions X et Y correspondantes.

Si l'élément linéaire $(\varphi-f)\,dx\,dy$ ne convient pas à une surface de révolution, nous savons et nous avons rappelé au début de ce Chapitre que les deux dérivées logarithmiques de $X-Y$ sont entièrement déterminées par la connaissance de $\varphi-f$. Il suit de là que, si l'une des fonctions φ ou f, la première par exemple, admet la période 2ω, les fonctions X et Y auront la même période. Car, augmentant x et y de ω, ce qui ne change pas $\varphi(x+y)$ par hypothèse, ni $f(x-y)$ qui ne dépend que de la différence $x-y$, on ne change pas les dérivées loga-

rithmiques de X — Y. En conséquence, on a

$$X(x+\omega) - Y(y+\omega) = C[X(x) - Y(y)],$$

C étant une constante. De là résulte, avec une nouvelle constante γ,

$$X(x+\omega) = CX(x) + \gamma, \qquad Y(y+\omega) = CY(y) + \gamma.$$

Donc les fonctions X et Y ne sont pas rationnelles (à moins d'être linéaires, cas qui se traite à vue). Elles sont donc périodiques de période $m\omega$, m étant un entier, ce qui permet de leur attribuer la même période qu'à φ. On déduit alors de la loi de réciprocité que f a aussi la même période, en sorte qu'on ne devra grouper ensemble, pour les substituer dans l'équation fondamentale, que quatre fonctions X, Y, φ, f rationnelles, ou quatre fonctions simplement périodiques de même période, ou quatre fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes.

Ce dernier cas peut d'ailleurs être laissé de côté, ayant été déjà traité. Les deux autres ne présentent aucune difficulté et ne donnent que des éléments linéaires de développables, de surfaces à courbure constante, de surfaces de révolution ou des éléments linéaires figurant dans le Tableau placé en tête de ce Chapitre. *Le problème des éléments linéaires doublement harmoniques est donc complètement résolu.*

CHAPITRE V.

LES SURFACES HARMONIQUES ET LES SURFACES DE TROISIÈME CLASSE DE M. SOPHUS LIE.

1. Dans son Mémoire déjà cité [1], M. S. Lie s'est proposé de trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces dont les lignes

[1] *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Mathem. Annalen*, t. XX, p. 357-454).

géodésiques admettent des transformations infinitésimales. Il a été conduit à répartir ces surfaces en trois classes, et il a montré que pour toute surface de troisième classe l'élément linéaire est réductible à la forme harmonique

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy.$$

Mais les fonctions φ et f ne sont pas arbitraires; car, si l'on pose

$$\varphi_0(x+y) = \int \varphi(x+y)\,d(x+y),$$

$$f_0(x-y) = \int f(x-y)\,d(x-y),$$

il doit exister deux fonctions, l'une X_0 de x, l'autre Y_0 de y, telles qu'on ait identiquement

$$(27)' \quad \left\{ \begin{aligned} &(X'_0 + Y'_0)(\varphi - f) + X_0(\varphi' - f') + Y_0(\varphi' + f') \\ &\quad = A(\varphi - f) + 4(\varphi^2 - f^2) - 2(\varphi_0\varphi'' - f_0 f''), \end{aligned} \right.$$

A étant une constante indéterminée (p. 379. Nous avons dû modifier légèrement les notations de l'auteur).

Arrivé à cette équation, M. Lie fait observer qu'en la traitant par des différentiations successives on serait conduit à des équations différentielles très compliquées. « C'est pourquoi, dit-il, j'ai dû me borner à en déterminer par des méthodes spéciales, mais rationnelles, une série de solutions particulières ».

2. Avant d'aller plus loin, remarquons que si l'on désigne par Ω le premier membre de l'équation $(27)'$, cette équation entraîne

$$\Omega''_{x^2} - \Omega''_{y^2} = 0,$$

ou, tous calculs faits,

$$(27)'' \quad \left\{ \begin{aligned} &2(X'_0 - Y'_0)(\varphi'' - f'') + 3X''_0(\varphi' - f') \\ &\quad - 3Y''_0(\varphi' + f') + (X'''_0 - Y'''_0)(\varphi - f) = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est précisément l'équation fondamentale qui exprime que l'élé-

ment linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ reste harmonique après le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X'_0(x)}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y'_0(y)}};$$

c'est-à-dire qu'il est doublement harmonique, si X'_0 et Y'_0 ne se réduisent pas à la même constante. On a donc cette propriété, trouvée autrement par M. Lie dans la Note II de son Mémoire :

Toute surface de troisième classe pour laquelle on n'a pas $X'_0 = Y'_0 =$ const. est une surface doublement harmonique.

Il suit de là que la troisième classe de M. Lie comprend *deux* catégories de surfaces : 1° celles pour lesquelles $X'_0 - Y'_0$ est différent de zéro; 2° celles pour lesquelles $X'_0 - Y'_0$ est nul.

Les surfaces de la seconde catégorie sont certainement harmoniques; elles peuvent être applicables sur des surfaces de révolution (p. 409) sans être, à proprement parler, harmoniques, c'est-à-dire sans que leur élément linéaire soit réductible à la forme $(\varphi - f)\,dx\,dy$ autrement qu'avec la restriction $\varphi f = 0$. Mais elles peuvent aussi être doublement harmoniques, l'équation $(27)'$ admettant d'autres solutions en même temps que $X'_0 = Y'_0 =$ const.

La première catégorie ne comprend que des surfaces doublement harmoniques; mais il s'en faut de beaucoup qu'elle les comprenne toutes. *C'est une catégorie de surfaces doublement harmoniques très particulières* puisque leur élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ doit satisfaire, non pas à l'équation générale

$$\begin{aligned}(X'_0 + Y'_0)(\varphi - f) + X_0(\varphi' - f') + Y_0(\varphi' + f')\\ = \Phi(x+y) - F(x-y),\end{aligned}$$

rigoureusement équivalente à l'équation $(27)''$ *quelles que soient les fonctions* Φ *et* F, mais à l'équation $(27)'$, où ces fonctions dépendent de φ et de f :

$$\Phi = A\varphi + 4\varphi^2 - 2\varphi_0\varphi'', \qquad F = Af + 4f^2 - 2f_0 f''.$$

Donc la recherche des surfaces de troisième classe est un problème

beaucoup plus déterminé que la recherche des surfaces doublement harmoniques.

3. C'est ce qui explique pourquoi M. Lie rencontre parfois des éléments linéaires doublement harmoniques sans les signaler comme tels et restreint leur généralité pour les faire rentrer dans la troisième classe. Ainsi, soit à *trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces qui peuvent être représentées sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des familles de longueur nulle, et sur d'autres avec conservation de ces deux familles*. L'ensemble des solutions de ce problème est fourni, d'après M. Lie, par les trois expressions

$$ds^2 = [L_1 \sin y \sin(2x+h) + M_1 \sin x] \cos y \, dx \, dy,$$

$$\begin{aligned} ds^2 = \{ & A[(x+y)^4 - (x-y)^4] \\ & + B[(x+y)^2 - (x-y)^2] + C[(x+y) - (x-y)]\} \, dx \, dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 = \{ & A[(x+y)^3 - (x-y)^3] \\ & + B[(x+y)^2 - (x-y)^2] + C[(x+y) - (x-y)]\} \, dx \, dy, \end{aligned}$$

où L_1, M_1, h, A, B, C sont des constantes arbitraires. Particularisées de manière à rentrer dans la seconde et la troisième classe, elles se réduisent (p. 403) au seul élément linéaire $(xy+a)\,dx\,dy$. Mais on peut, ce que ne fait pas l'auteur, remarquer que *ces éléments linéaires, pris dans toute leur généralité, sont doublement harmoniques*. Car ils rentrent visiblement dans les types I et II du second groupe de solutions (provenant des surfaces à courbure constante) qui figurent au Tableau de notre précédent Chapitre (n° 5). On arrive ainsi à cette proposition, qui complète la théorie de la représentation géodésique des surfaces : *Toute surface susceptible d'être représentée géodésiquement sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des familles de longueur nulle et sur d'autres avec conservation de ces deux familles est une surface doublement harmonique*.

4. En ce qui concerne la recherche des éléments linéaires de troisième classe et de première catégorie, observons que ce problème est

implicitement résolu au Chapitre précédent. Puisque nous avons trouvé *tous* les éléments linéaires doublement harmoniques $(\varphi - f)\,dx\,dy$ et *tous* les couples correspondants de fonctions X et Y, il suffira d'effectuer les quadratures

$$\varphi_0 = \int \varphi\, dt, \qquad f_0 = \int f\, dz, \qquad X_0 = \int X\, dx, \qquad Y_0 = \int Y\, dy,$$

et de substituer dans l'équation $(27)'$ de M. Lie pour en obtenir toutes les solutions, en particularisant d'une façon convenable les constantes qui sont arbitraires dans nos formules.

Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé;

PAR M. MAURICE HAMY.

Lorsque l'inclinaison relative γ des plans des orbites de deux planètes P, P_1 est petite, la partie principale de la fonction perturbatrice s'exprime au moyen d'une série procédant suivant les puissances de $\sin^2\frac{\gamma}{2}$, dont les termes cessent très rapidement d'être sensibles. Les coefficients des puissances de $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ sont de la forme

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f(E^{iu}) f_1(E^{iu_1})}{\Delta^s},$$

E désignant la base des logarithmes népériens; i le symbole $\sqrt{-1}$; ζ et ζ_1 les anomalies moyennes respectives des planètes P, P_1; u et u_1 les anomalies excentriques; $f(E^{iu})$ une fonction réelle entière de $\sin u$ et $\cos u$; $f_1(E^{iu_1})$ une fonction réelle entière de $\sin u_1$ et $\cos u_1$; s un nombre de la forme $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, peu élevé dans les applications; Δ l'expression du carré de la distance des planètes, où l'on a fait $\gamma = 0$.

On rencontre aussi, dans le calcul des inégalités lunaires d'ordre élevé causées par l'action des planètes, des expressions de même forme (¹).

(¹) HILL, *American Journal of Mathematics*, t. VI; — RADAU, *Recherches concernant les inégalités planétaires du mouvement de la Lune* (*Annales de l'Observatoire*, t. XXI).

La connaissance des coefficients de $\frac{\cos}{\sin}(m\zeta + m_1\zeta_1)$ dans le développement trigonométrique de F_0 suffit donc aux besoins de l'Astronomie lorsque l'inclinaison γ est petite.

J'ai entrepris de rechercher l'expression asymptotique de ces coefficients lorsque les entiers m et m_1 sont grands.

Dans le présent Mémoire, je suppose nulle l'excentricité de la planète P_1, l'excentricité e de la planète P pouvant prendre une valeur quelconque. Je considère le cas où l'orbite circulaire de P_1 enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite elliptique de P.

Un cas particulier du problème ainsi posé a été examiné par M. Poincaré [1].

M. Poincaré a pris $f = f_1 = 1$, $s = \frac{1}{2}$, a supposé l'excentricité e très petite et la valeur de $\frac{m}{m_1}$ voisine du rapport des moyens mouvements des deux planètes.

Je ne fais aucune hypothèse particulière sur les valeurs de $\frac{m}{m_1}$ et de e, et je laisse à f, f_1, s leur signification générale.

Les travaux de M. Darboux, concernant l'approximation des fonctions de grands nombres [2], m'ont conduit à reconnaître qu'une certaine fonction, désignée dans le texte par $\varphi(z)$, fonction qui est entièrement explicite, devait jouer un rôle important dans les discussions; j'ai procédé de façon à faire apparaître dès le début cette fonction $\varphi(z)$. Si je me suis ainsi écarté de la méthode proposée par M. Poincaré, l'Ouvrage de l'illustre géomètre m'a néanmoins été d'un secours indispensable pour mener à bonne fin la tâche que je m'étais imposée [3].

Les divisions principales de mon travail sont les suivantes :

INTRODUCTION. Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres; méthode de M. Darboux.

I. Expression des coefficients éloignés du développement d'une

---

(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I.

(2) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1878.

(3) Le présent Mémoire a fait l'objet de deux Communications dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (numéros du 25 décembre 1893 et du 27 mars 1894.

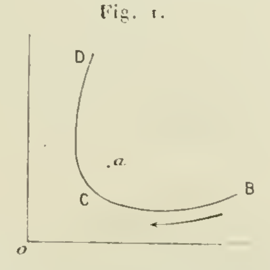
fonction périodique de deux variables au moyen d'intégrales I et J, à limites imaginaires.
II. Définitions de la fonction $\varphi(z)$ et de la fonction $F(x, z)$; points singuliers et valeur asymptotique de la fonction J.
III. Étude de la dérivée $\varphi'(z)$.
IV. Étude de $|\varphi(z)|$.
V. Remarques concernant les équations qui fournissent les points singuliers de J.
VI. Valeur de I dans quelques cas particuliers. Décomposition de I, dans les autres cas, en deux parties I′ et I″. Expressions de I″.
VII. Transformation de l'expression de la distance des planètes et de la fonction $F(x, z)$.
VIII. Transformation de I′. Définition de la fonction $\Phi(x)$.
IX. Développement de la fonction $\Phi(x)$.
X. Calcul de I′.
XI. Conclusions.
Résumé des formules.
Applications.
Addition.

INTRODUCTION.

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS DE GRANDS NOMBRES. MÉTHODE DE M. DARBOUX.

1. Considérons, dans le plan représentatif d'une variable complexe, un contour BCD (*fig.* 1) et un point a. Admettons que les circon-

Fig. 1.



stances suivantes se présentent simultanément : 1° les extrémités B, D du contour sont plus éloignées de l'origine que le point a; 2° le

contour rencontre la droite Oa en un point unique, compris sur le segment Oa, on satisfait à cette condition après des déformations convenables. Nous dirons alors, pour abréger le langage, que le contour BCD est de *première espèce* par rapport au point a.

Nous désignerons par contour de *seconde espèce* par rapport au point a un contour dont toutes les parties sont plus éloignées de l'origine que le point a.

Les contours de seconde espèce jouissent de la propriété suivante :

L'intégrale

$$M = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}},$$

supposée finie, étant prise le long d'un contour C, *de seconde espèce par rapport à un point dont la distance à l'origine est* R, *le produit* $R^n n^q M$ *tend vers zéro lorsque* n *augmente indéfiniment,* q *désignant un nombre fini quelconque aussi grand que l'on veut.*

Cette proposition joue un rôle essentiel dans l'établissement des théorèmes qui vont suivre et que nous nous bornerons à énoncer.

Théorème I. — *Étant donnée l'intégrale*

$$M = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \Phi(z)\frac{dz}{z^{n+1}}$$

prise le long d'un contour BCD (*fig.* 1), *dans laquelle* n *désigne un entier positif très grand, on peut en général obtenir une expression approchée de* M *en mettant à profit la grandeur de* n, *lorsque le contour d'intégration est de première espèce par rapport à un ou plusieurs points singuliers de la fonction* $\Phi(z)$. *On suppose d'ailleurs* 1° *que ces points singuliers particuliers sont isolés les uns des autres par des espaces finis;* 2° *que le contour ne rencontre aucune singularité de* $\Phi(z)$.

Premier cas. — Admettons que le contour d'intégration soit de première espèce par rapport à un certain nombre de points singuliers de $\Phi(z)$. Appelons a l'affixe de celui de ces points particuliers qui

approche le plus près de l'origine et supposons que l'on puisse écrire dans le domaine de a

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \varphi(z) + A_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} + A_2\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \ldots\\ + A_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p} + \left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha}\psi(z);\end{aligned}$$

la fonction φ étant holomorphe et la fonction ψ finie dans le domaine de a; $A_1, A_2, \ldots, A_p$ désignant des constantes; α *un nombre supérieur à* -1, vérifiant les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_p < \alpha.$$

Les binomes affectés d'exposants entiers rentrent dans la fonction φ; on peut donc admettre que la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ne contient pas d'entiers positifs.

Dans ces conditions, le coefficient N de z^n, dans le développement de la fonction

$$F(z) = A_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1} + A_2\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2} + \ldots + A_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p},$$

diffère de M d'une quantité N′ dont l'ordre de grandeur ne dépasse pas l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$, en faisant $R = |a|$. Il faut entendre par là que, si l'on pose

$$M = N + N',$$

le produit $R^n n^{1+\alpha}|N'|$ ne dépasse pas un nombre fixe, lorsque n augmente indéfiniment.

Il y a exception lorsque la fonction $\psi(z)$ est identiquement nulle. Il arrive alors que le produit $R^n n^q N'$ tend vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment, quel que soit le nombre q, si grand qu'il soit, pourvu qu'il soit fini.

Cette circonstance se présente lorsque a est un pôle de $\Phi(z)$.

Conséquences du théorème précédent. — On utilise le théorème précédent en se fondant sur ce que le coefficient T_h de z^n dans le développement de $\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_h}$, pour n très grand, est de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{1}{n^{1+\alpha_h}}$;

c'est-à-dire que le produit $R^n n^{1+\alpha_h} T_h$ reste fini et différent de zéro lorsque n devient infini.

Formons l'expression de N et portons-la dans l'équation qui précède. M se trouve décomposé en un nombre fini de termes qui décroissent de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment :

$$M = A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + \ldots + A_{p-1} T_{p-1} + A_p T_p + N'.$$

On voit ainsi qu'en prenant $A_1 T_1$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{\alpha_2+1}}$; on peut écrire

$$M = A_1 T_1 (1 + \varepsilon_2),$$

ε_2 étant infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_2-\alpha_1}}$.

Si l'on prend $A_1 T_1 + A_2 T_2$ comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_3}}$; on peut écrire

$$M = (A_1 T_1 + A_2 T_2)(1 + \varepsilon_3),$$

ε_3 étant infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_3-\alpha_1}}$.

Etc. ....

Si l'on prend $A_1 T_1 + A_2 T_2 + \ldots + A_{p-1} T_{p-1}$, comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^n} \frac{1}{n^{1+\alpha_p}}$; on peut écrire

$$M = (A_1 T_1 + A_2 T_2 + \ldots + A_{p-1} T_{p-1})(1 + \varepsilon_p),$$

ε_p étant infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n^{\alpha_p-\alpha_1}}$.

Enfin, si l'on prend N comme valeur approchée de M, on commet une erreur de l'ordre de N'; on peut écrire

$$M = N(1 + \varepsilon),$$

le produit $n^{\alpha-\alpha_1}|\varepsilon|$ demeurant au-dessous d'un nombre fixe, lorsque n croît indéfiniment.

Si la fonction $\psi(z)$ est identiquement nulle, le produit $n^q \varepsilon$ tend vers

zéro, lorsque n augmente indéfiniment, q désignant un nombre fini quelconque, aussi grand que l'on veut.

Remarque I. — La fonction $\psi(z)$ est, en général, développable suivant les puissances positives ascendantes de $1 - \frac{z}{a}$. On peut alors augmenter à volonté l'exposant α et réduire ε autant qu'il est nécessaire. Mais, le plus souvent, il est suffisant de prendre $A_1 T_1$ comme valeur approchée de M.

Remarque II. — Ce qui vient d'être dit suppose essentiellement 1° que la variable d'intégration chemine sur le contour de façon à tourner autour du point a dans le sens rétrograde (sens des arguments décroissants); s'il en était autrement, il faudrait changer le signe des résultats obtenus d'après la règle qui vient d'être donnée; 2° que les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ont été choisies de façon que la valeur des binomes $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}$, $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}$, $\cdots$ soit réelle et positive, lorsque z désigne l'affixe d'un point du segment de droite oa (*fig.* 1).

Deuxième cas. — Admettons que le contour d'intégration soit de première espèce, par rapport à un certain nombre de points singuliers de $\Phi(z)$ et supposons que ceux de ces points qui ont pour affixes a, b, c, ..., soient 1° à la même distance, R, de l'origine, 2° plus rapprochés de l'origine que les autres singularités, par rapport auxquelles le contour est de première espèce.

Chacun de ces points singuliers a, b, c, ... apporte alors un appoint à la valeur approchée de M.

Cette valeur s'obtient en appliquant, successivement à chacun des points a, b, c, ..., la règle donnée dans le premier cas et en faisant la somme S des résultats.

On détermine pour chacun des points a, b, c, ... l'ordre de grandeur des termes négligés d'après la règle donnée dans le premier cas. La plus grande des valeurs obtenues donne l'ordre de l'erreur commise, lorsque l'on remplace M par son expression approchée S. On peut écrire

$$M = S(1 + \varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit, en même temps que $\frac{1}{n}$, d'autant plus petit que la différence entre l'ordre du terme le plus important de S et l'ordre de l'erreur commise est plus accusée.

Ce théorème étend les résultats obtenus par M. Darboux, dans son beau Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres(1). Il a été découvert par M. Flamme (2), qui s'est placé dans l'hypothèse où le développement de la fonction $\Phi(z)$, autour de ses points singuliers, peut être prolongé indéfiniment.

Je me bornerai ici à indiquer qu'en exprimant, au moyen de la fonction eulérienne de seconde espèce, les factorielles contenues dans $T_1, T_2, \ldots$, on obtient une expression approchée de M qui est valable pour les valeurs positives *entières ou fractionnaires* de n.

Généralisation du théorème précédent. — Revenons au premier cas du théorème I et supposons que l'on puisse écrire dans le domaine du point singulier a de $\Phi(z)$

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \varphi(z) &+ A_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}\operatorname{Log}^{q_1}\left(1-\frac{z}{a}\right)\\ &+ A_2\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_2}\operatorname{Log}^{q_2}\left(1-\frac{z}{a}\right)+\ldots\\ &+ A_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}\operatorname{Log}^{q_p}\left(1-\frac{z}{a}\right)+\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha}\operatorname{Log}^{q}\left(1-\frac{z}{a}\right)\psi(z);\end{aligned}$$

la fonction φ étant holomorphe et la fonction ψ finie dans le domaine de a; $A_1, \ldots, A_p$ désignant des constantes; $q_1, q_2, \ldots, q_p, q$ des entiers positifs ou nuls rangés dans un ordre quelconque; α étant un nombre supérieur à -1 vérifiant les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p < \alpha.$$

La fonction $\varphi(z)$ comprenant la partie holomorphe de $\Phi(z)$, dans le voisinage de a, nous admettrons que si la suite des entiers

$$q_1, q_2, \ldots, q_p$$

(1) *Loc. cit.*

(2) *Thèse de doctorat.* Paris, Gauthier-Villars, 1887.

contient des termes nuls, les termes de même rang de la suite

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

ne sont pas des entiers positifs.

Dans ces conditions, le coefficient N de z^n dans le développement de la fonction

$$F(z) = A_1\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_1}\operatorname{Log}^{q_1}\left(1-\frac{z}{a}\right)+\ldots+A_p\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\alpha_p}\operatorname{Log}^{q_p}\left(1-\frac{z}{a}\right)$$

diffère de M d'une quantité N′, dont le module multiplié par $\frac{R^n n^{1+\alpha}}{\operatorname{Log}^q n}$ demeure au-dessous d'un nombre fixe, lorsque n augmente indéfiniment.

Conséquences. — Les applications de ce théorème sont fondées sur ce que

1° Le coefficient de z^n, dans le développement $\left(1-\frac{z}{a}\right)^h\operatorname{Log}^k\left(1-\frac{z}{a}\right)$, est de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{\operatorname{Log}^{k-1} n}{n^{1+h}}$, si h est un entier positif ou nul (k entier positif non nul), ou de l'ordre de $\frac{1}{R^n}\frac{\operatorname{Log}^k n}{n^{1+h}}$, si h n'est pas un entier positif ou nul (k entier positif ou nul);

2° Toute puissance positive de $\operatorname{Log} n$ est infiniment petite par rapport à toute puissance positive de n si petite qu'elle soit, pourvu qu'elle soit finie, lorsque n croît indéfiniment.

Il résulte de là que l'on peut, comme dans le théorème I, décomposer M en un nombre fini de termes, qui vont en décroissant de telle sorte que le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$. En prenant comme valeur approchée de M un certain nombre de ces termes, on commet une erreur de l'ordre du premier terme négligé et cette valeur approchée tend asymptotiquement vers M, lorsque n augmente indéfiniment [1].

Lorsque le contour d'intégration est de première espèce par rapport

---

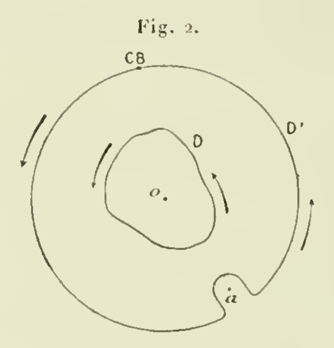
[1] Aux remarques faites deux pages plus haut, on doit ajouter que la détermination de $\operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{a}\right)$, considérée ici, est réelle et négative, lorsque z est l'affixe d'un point de oa (*fig.* 1).

à un certain nombre de points singuliers de $\Phi(z)$ et que, parmi ceux-ci, plusieurs sont équidistants de l'origine et plus rapprochés que les autres de l'origine, on doit considérer tous ces points singuliers particuliers, et leur appliquer la règle donnée dans le deuxième cas du théorème I [1].

2. Voici un corollaire important des propositions qui précèdent, applicable seulement lorsque n est entier :

Corollaire. — Supposons que l'intégrale M soit prise le long d'un contour fermé D (*fig.* 2), et que la fonction $\Phi(z)$ reprenne sa valeur

Fig. 2.



lorsque la variable complexe z, après avoir décrit le contour en entier, revient au point de départ.

Supposons que $\Phi(z)$ ait, à l'extérieur du contour D, un certain nombre de points singuliers et soit a l'affixe de celui de ces points qui est le plus rapproché de l'origine. Admettons que ce point singulier soit de la nature de ceux que nous avons considérés jusqu'ici.

Il est aisé de voir que la valeur approchée de M s'obtient en appliquant au point a la règle déduite du théorème I.

En effet, la fonction $\Phi(z)$ reprenant sa valeur lorsque la variable parcourt en entier le contour D, ce contour peut être déformé d'une façon quelconque, à condition d'éviter de rencontrer les points singuliers de $\Phi(z)$ et l'origine. On peut prendre, en particulier, comme nouveau contour d'intégration, une circonférence D', ayant l'origine pour centre, de rayon supérieur à $|a|$, déformée comme il est indiqué

---

[1] Ces propositions sont applicables lorsque $\Phi(z)$ dépend de n, à condition que cette fonction demeure finie lorsque n croît indéfiniment.

(*fig.* 2), de façon à laisser le point a à l'extérieur du contour; le rayon de la circonférence doit, en outre, être choisi de façon que les points singuliers de $\Phi(z)$, plus éloignés de l'origine que a, soient extérieurs au nouveau contour ([1]).

En prenant, comme extrémités du nouveau contour, un point B, C de la circonférence, on obtient un contour de première espèce par rapport au point a. Il faut donc appliquer à ce point la règle donnée précédemment. C. Q. F. D.

S'il y avait plusieurs points singuliers de $\Phi(z)$, également éloignés de l'origine, à l'extérieur du contour D, et plus rapprochés de l'origine que les autres points extérieurs, on devrait utiliser tous ces points singuliers particuliers pour obtenir la valeur approchée de M.

Conséquences. — 1° Supposons $\Phi(z)$ développable par la série de Mac Laurin à l'intérieur d'une circonférence de rayon R et admettons que la convergence du développement cesse au delà de ce cercle, parce que la fonction $\Phi(z)$ possède, sur la circonférence R, un ou plusieurs points singuliers de la nature de ceux qui ont été considérés jusqu'ici. M représente alors le coefficient de z^n dans le développement de $\Phi(z)$. La considération des points singuliers dont il s'agit permet d'obtenir la valeur approchée de ce coefficient.

C'est cette proposition très importante qui a fait l'objet du beau Mémoire de M. Darboux.

2° Si la fonction $\Phi(z)$ est développable, non par la série de Mac Laurin, mais par la série de Laurent, à l'intérieur d'une couronne circulaire limitée extérieurement par une circonférence de rayon R, la considération des points singuliers situés sur cette circonférence permet d'obtenir la valeur approchée du coefficient de z^n.

Pour obtenir la valeur approchée du coefficient de $\frac{1}{z^n}$, poser $z = \frac{1}{z'}$, et chercher la valeur approchée du coefficient de z'^n.

3. 1° Soit A_n le coefficient de z^n dans le développement de $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h$.

([1]) Si le contour D renferme des singularités, à une distance de l'origine supérieure à $|a|$, dilater la circonférence D' de façon qu'elle les contienne.

On a

$$A_n = \frac{1}{a^n} \frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)\Gamma(n+1)}.$$

On peut prendre pour n très grand

$$(\mathfrak{A}) \qquad A_n = \frac{1}{\Gamma(-h)} \frac{1}{a^n} \frac{1}{n^{1+h}} \left[1 + \frac{h(h+1)}{2n} + \ldots \right].$$

2° Soit q un entier positif. Appelons $B_n^{(q)}$ le coefficient de z^n dans le développement de $\left(1 - \frac{z}{a}\right)^h \operatorname{Log}^q \left(1 - \frac{z}{a}\right)$.

On a, si *h n'est pas un entier positif*,

$$B_n^{(q)} = \frac{1}{a^n} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^q}{dh^q} \frac{\Gamma(n-h)}{\Gamma(-h)}.$$

Il est facile de développer cette expression suivant les puissances descendantes de n. En particulier, $B_n^{(1)}$ a pour valeur approchée

$$(\mathfrak{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} B_n^{(1)} = {} & \frac{1}{a^n} \frac{1}{\Gamma(-h)} \frac{1}{n^{1+h}} \\ & \times \left\{ \frac{\Gamma'(-h)}{\Gamma(-h)} - \operatorname{Log} n \right. \\ & \left. \quad + \frac{1}{2n} \left[h(h+1) \frac{\Gamma'(-h)}{\Gamma(-h)} - h(h+1) \operatorname{Log} n + 2h + 1 \right] + \ldots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si *h est un entier positif ou nul* il convient d'écrire

$$B_n^{(q)} = -\frac{1}{a^n} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d^q}{dh^q} \frac{\sin \pi h}{\pi} \Gamma(1+h) \Gamma(n-h).$$

On a, en particulier,

$$B_n^{(1)} = \frac{(-1)^{h+1}}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(n-h)}{\Gamma(n+1)},$$

ou, approximativement,

$$(\mathfrak{C}) \qquad B_n^{(1)} = \frac{(-1)^{h+1}}{a^n} \frac{\Gamma(h+1)}{n^{1+h}} \left[1 + \frac{h(h+1)}{2n} + \ldots \right].$$

Les développements asymptotiques qui précèdent se déduisent de

l'expression approchée

$$\Gamma(n+p) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}^{-n}\,n^{n+p-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{12n}[1+6p(p+1)] + \ldots\right\},$$

où n désigne un grand nombre positif quelconque, p un nombre fini, E la base des logarithmes népériens.

Ce développement asymptotique de $\Gamma(n+p)$ jouit de la propriété de pouvoir être différentié par rapport à p, en sorte que le développement asymptotique de $\dfrac{d^r\,\Gamma(n+p)}{dp^r}$ s'obtient en dérivant r fois, terme à terme, le développement de $\Gamma(n+p)$, par rapport à p.

4. M. Darboux a étendu, dans son Mémoire, le résultat de Laplace concernant la valeur approchée des intégrales de la forme

$$\int f(z)\,\varphi^n(z)\,dz,$$

où il entre un facteur élevé à une haute puissance, au cas des intégrales à limites imaginaires.

Théorème II. — *L'intégrale* $\int f(z)\,\varphi^n(z)\,dz$ *étant prise le long d'un chemin d'intégration donné, supposons que l'on puisse déformer ce chemin de façon à le faire passer par un point* a, *autre qu'une des limites de l'intégrale, jouissant des propriétés suivantes : 1° la plus grande valeur de* $|\varphi(z)|$ *le long du nouveau contour a lieu en* a; *2°* $\varphi'(a) = 0$; *3° les fonctions* $\varphi(z)$ *et* $f(z)$ *sont holomorphes autour du point* a. *Dans ces conditions la valeur asymptotique de l'intégrale est la suivante*

$$\left\{\begin{aligned}&\int f(z)\,\varphi^n(z)\,dz\\ &= \sqrt{-2\frac{\varphi}{\varphi''}}\,\varphi^n\sqrt{\frac{\pi}{n}}\left\{f + \frac{1}{2n}\left[-\frac{3}{4}f + \frac{\varphi}{\varphi''}\left(\frac{1}{4}\frac{f\varphi^{\mathrm{IV}}}{\varphi''} - \frac{5}{12}\frac{f\varphi'''^2}{\varphi''^2} + \frac{f'\varphi'''}{\varphi''} - f''\right)\right] + \ldots\right\}.\end{aligned}\right.$$

Dans cette expression, n *désigne un grand nombre positif quelconque; les lettres* $f, f', \ldots, \varphi, \varphi'', \ldots$ *sont mises à la place de* $f(a), f'(a), \ldots, \varphi(a), \varphi''(a), \ldots$.

Le nouveau contour passe quelquefois par plusieurs points, analogues à a, dont les affixes satisfont à l'équation $|\varphi(z)| = |\varphi(a)|$. Il faut alors calculer le second membre de la formule (ϖ) pour chacun de ces points. La valeur asymptotique de l'intégrale est égale à la somme des résultats [1].

Le radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est susceptible de deux déterminations. La règle suivante donne le moyen de choisir entre ces déterminations. Soit ω l'angle que fait, avec la partie positive de l'axe des abscisses, la tangente menée au contour au point a, dans le sens du mouvement de la variable d'intégration.

Si ω est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, la partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est positive.

Si ω est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$, la partie imaginaire de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est positive.

Si ω est compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$, la partie réelle de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est négative.

Si ω est compris entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$, la partie imaginaire de $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est négative.

5. Avant de quitter ce sujet il y a lieu de donner quelques indications sur la façon dont varie $|\varphi(z)|$ dans le voisinage d'un point a pour lequel $\varphi'(a) = 0$.

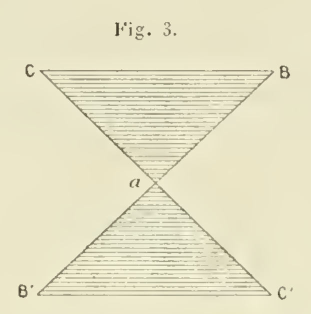
Il existe deux droites rectangulaires passant par a et divisant le plan en régions jouissant de propriétés différentes. Dans l'une de ces régions CaB', BaC', par exemple (*fig.* 3), $|\varphi(z)|$ passe par un maximum pour $z = a$, lorsque z suit un contour tracé dans cette région, au moins dans le voisinage de a. Dans la seconde région, CaB, $C'aB'$, $|\varphi(z)|$ passe, au contraire, par un minimum pour $z = a$. Lorsque la variable complexe z suit l'une des droites CC' ou BB', $|\varphi(z)|$ s'infléchit pour $z = a$.

---

[1] Ce théorème est applicable lorsque $f(z)$ et $\varphi(z)$ dépendent de n, à condition que ces fonctions demeurent finies lorsque n croît indéfiniment.

Il résulte de là que, quel que soit le contour qui passe par a, la dérivée de $|\varphi(z)|$, par rapport à la variable indépendante réelle dont dépend le point z lorsqu'il chemine sur ce contour, devient nulle lorsque cette variable atteint la valeur qui rend z égal à a.

Fig. 3.



Réciproquement, considérons une fonction $\varphi(z)$, holomorphe dans le voisinage d'un point d'affixe a, et deux contours C, C' passant par ce point dans des directions différentes. Formons l'expression de $|\varphi(z)|$ le long du contour C et admettons que la dérivée de $|\varphi(z)|_C$, par rapport au paramètre réel dont dépend la variable complexe z le long de ce contour, soit nulle lorsque ce paramètre reçoit la valeur qui rend z égal à a.

Admettons que les mêmes circonstances se présentent pour le contour C'.

Il arrive alors que a est racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$.

J'ai dû me borner à énoncer ici les propositions sur lesquelles sont fondées mes recherches présentes sur le développement approché de la fonction perturbatrice.

Je me propose de revenir sur ces méthodes d'approximation qui peuvent être étendues de manière à fournir, dans des circonstances très générales, la valeur approchée des intégrales définies où il entre un facteur élevé à une haute puissance.

I.

6. Étant donnée une fonction réelle $F_0(\zeta_1, \zeta)$ de période 2π par rapport à chacune des variables ζ_1, ζ, on peut la développer sous la

forme suivante, en appelant $B_{p_1,p}$ et $C_{p_1,p}$ des coefficients constants,

$$F_0(\zeta_1,\zeta)=\sum_{p_1}\sum_{p} B_{p_1,p}\cos(p_1\zeta_1+p\zeta)+\sum_{p_1}\sum_{p} C_{p_1,p}\sin(p_1\zeta_1+p\zeta).$$

Si l'on remplace les lignes trigonométriques en fonction d'exponentielles imaginaires, il vient, en désignant toujours par E la base des logarithmes népériens et par i le symbole $\sqrt{-1}$,

$$(1) \qquad F_0(\zeta_1,\zeta)=\sum_{p_1}\sum_{p} A_{p_1,p}\,E^{i(p_1\zeta_1+p\zeta)},$$

en posant

$$B_{p_1,p}-iC_{p_1,p}=2A_{p_1,p},$$
$$B_{p_1,p}+iC_{p_1,p}=2A_{-p_1,-p}.$$

Si donc on développe $F_0(\zeta_1,\zeta)$ sous la forme (1), le double de la partie réelle de $A_{p_1,p}$ donne le coefficient $B_{p_1,p}$ et le double du coefficient de $-i$ dans $A_{p_1,p}$ donne le coefficient $C_{p_1,p}$.

En particulier, pour résoudre le problème énoncé dans l'avant-propos du présent travail, il faut calculer $A_{m_1,m}$.

Nous supposerons, dans la suite, $m_1>0$, le nombre m pouvant être positif ou négatif.

7. Posons

$$(2) \quad \frac{m}{m_1}=\theta, \qquad E^{i\zeta}=t, \qquad E^{i\zeta_1}=t^{-\theta}x, \qquad F_1(x,t)=t^{-1}F_0(\zeta_1,\zeta).$$

Considérons les intégrales

$$(3) \qquad J_1=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{F_1(x,t)}{x^{m_1+1}}\,dx,$$

$$(4) \qquad I=\frac{1}{2i\pi}\int J_1\,dt,$$

prises, la première le long de la circonférence $|x| = 1$, la seconde le long de la circonférence $|t| = 1$.

On a, d'après les formules (1) et (2),

$$J_1 = \sum_{p_1}\sum_{p} A_{p_1, p}\, t^{p-\theta p_1 - 1}\, \frac{1}{2i\pi}\int_{|x|=1} x^{p_1 - m_1}\frac{dx}{x}.$$

L'intégrale est nulle tant que $p_1 \gtrless m_1$ et a pour valeur $2i\pi$ pour $p_1 = m_1$. On peut donc écrire

$$(3)' \qquad J_1 = \sum_{p} A_{m_1, p}\, t^{p-\theta m_1 - 1},$$

ou, en observant que $\theta m_1 = m$, d'après la première formule (2),

$$(5) \qquad J_1 = \sum_{p} A_{m_1, p}\, t^{p-m-1}.$$

Remplaçons J_1 par cette expression dans la formule (4). Il vient

$$I = \sum_{p} A_{m_1, p}\, \frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1} t^{p-m}\frac{dt}{t}.$$

L'intégrale est nulle tant que $p \gtrless m$; elle a pour valeur $2i\pi$ lorsque $p = m$.

On a donc

$$I = A_{m_1, m}.$$

La détermination de $A_{m_1, m}$ est ainsi ramenée au calcul de l'intégrale (4); c'est ce qui va maintenant nous occuper.

Voici d'abord quelques remarques qui seront utilisées dans la suite du présent travail.

La valeur de l'intégrale (4) ne dépend pas de la détermination de $t^{-\theta}$ adoptée dans les formules (2) (ces déterminations sont au nombre de m_1 lorsque m et m_1 sont premiers entre eux). On en voit la raison en examinant la formule (3)', où $t^{-\theta}$ se trouve élevé à la puissance m_1. Afin de fixer les idées, nous pouvons convenir de partir du point $t = 1$,

dans le plan de la variable t, avec la détermination de $t^{-\theta}$ qui a pour valeur 1.

Le développement (1) est valable pour les valeurs réelles de ζ_1 et de ζ. En y introduisant les nouvelles variables t et x, au moyen des formules (2), le développement converge donc forcément lorsque $|t| = 1$ et $|x| = 1$.

D'après les formules (1) et (2), le développement de $F_1(x, t)$ ne contient que des puissances entières de la variable x. Cette fonction reprend donc sa valeur lorsque le point x, après avoir parcouru la circonférence $|x| = 1$ en entier, revient au point de départ.

Dans le calcul de J_1 on pourra par suite déformer la circonférence $|x| = 1$ arbitrairement, à la condition d'éviter de faire traverser à ce contour variable les points singuliers de $\frac{F_1(x, t)}{x^{m_1+1}}$ en tant que fonction de x.

Voici une autre remarque qui a également une grande importance. La formule (5) donne le développement de la fonction J_1, suivant les puissances de t. Ce développement, qui est valable pour $|t| = 1$, contient uniquement des puissances entières de t. J_1 reprend donc sa valeur lorsque la variable t, après avoir décrit la circonférence $|t| = 1$ en entier, revient au point de départ. Dans le calcul de I on pourra donc déformer la circonférence $|t| = 1$ d'une façon arbitraire, pourvu que l'on évite de faire traverser à ce contour variable les points singuliers de J_1.

8. Dans le problème qui doit nous occuper, ζ et ζ_1 sont les anomalies moyennes des deux planètes P, P_1.

A la variable t nous allons en substituer une autre, z, définie par

$$z = E^{iu}.$$

L'équation de Kepler $u - e \sin u = \zeta$ donne en faisant $e = \sin\psi$ et tenant compte de la seconde formule (2),

$$(6)\quad \begin{cases} E^{i\zeta} = t = z\,E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}, \\ \dfrac{dt}{t} = -\dfrac{\sin\psi}{2z^2}\left(z - \operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\dfrac{\psi}{2}\right)dz. \end{cases}$$

Les formules connues du mouvement elliptique (¹) (w anomalie vraie, r rayon vecteur, a demi grand axe de P),

$$r\cos w = a(\cos u - e),$$
$$r\sin w = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$
$$r = a(1 - e\cos u),$$

se changent en

$$(7)\qquad \begin{cases} r\,\mathrm{E}^{iw} = \dfrac{a\cos^2\frac{\psi}{2}}{z}\left(z - \operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2}\right)^2, \\[2ex] r\,\mathrm{E}^{-iw} = \dfrac{a\sin^2\frac{\psi}{2}}{z}\left(z - \cot\dfrac{\psi}{2}\right)^2, \\[2ex] r = -\dfrac{a\sin\psi}{2z}\left(z - \operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\dfrac{\psi}{2}\right). \end{cases}$$

Ces formules seront bientôt utilisées.

Effectuons dans l'intégrale (4) le changement de variable défini par les formules (6).

Aux valeurs réelles de ζ correspondent pour u des valeurs réelles; il en résulte que $|z| = 1$ lorsque $|t| = 1$.

Le contour d'intégration que doit suivre la variable nouvelle z est donc la circonférence $|z| = 1$ qui est la transformée de la circonférence $|t| = 1$. En posant

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{m}{m_1} = 0, \qquad \mathrm{E}^{\sqrt{-1}\,\zeta} = t = z\,\mathrm{E}^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}, \qquad \mathrm{E}^{\sqrt{-1}\,\zeta_1} = t^{-\theta}x, \\[2ex] \mathrm{F}(x, z) = -\dfrac{\sin\psi}{2z^2}\left(z - \operatorname{tang}\dfrac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\dfrac{\psi}{2}\right)\mathrm{F}_0(\zeta_1, \zeta), \end{cases}$$

on peut écrire l'expression (4) de I

$$(9)\qquad \mathrm{I} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} \mathrm{J}\,dz,$$

(¹) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 101 et 103.

en faisant

$$(10) \qquad J = \frac{1}{2i\pi}\int_{|x|=1} \frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}\,dx.$$

Nous avons fait observer que J_1 est une fonction uniforme de t dans le voisinage de la circonférence $|t| = 1$. En remplaçant, dans cette fonction, t par sa valeur (8), uniforme en z, J_1 devient une fonction uniforme de z dans le voisinage de la circonférence $|z| = 1$. Or on a, d'après les formules (10), (8), (3), (2),

$$J = -\frac{\sin\psi}{2z^2}\left(z - \tang\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)tJ_1;$$

donc J est une fonction uniforme de z dans le voisinage de la circonférence $|z| = 1$, c'est-à-dire reprend sa valeur, lorsque la variable z, après avoir décrit en entier la circonférence $|z| = 1$, revient au point de départ.

II.

9. Appliquons les considérations qui précèdent au problème particulier énoncé dans l'avant-propos de ce Mémoire.

Appelons a_1 et ζ_1 le rayon vecteur et l'anomalie moyenne de la planète P_1 qui décrit l'orbite circulaire; r, a, $e = \sin\psi$, ζ, u, w, le rayon vecteur, le demi grand axe, l'excentricité, l'anomalie moyenne, l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie de la planète P. On peut supposer, puisque l'excentricité de P_1 est nulle, que le périhélie de cette planète et celui de la planète P ont même longitude.

Le carré de la distance de P_1 et de P a ainsi pour valeur

$$\Delta = a_1^2 + r^2 - 2a_1 r(\cos\zeta_1\cos w + \sin\zeta_1\sin w).$$

r, w, u étant supposés exprimés en fonction de ζ, on a dans le cas actuel

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f_1(E^{i\zeta_1})\,f(E^{iu})}{[a_1^2 + r^2 - 2a_1 r(\cos\zeta_1\cos w + \sin\zeta_1\sin w)]^s}.$$

On en déduit, après l'introduction des notations (8),

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} F(x,z) = &-\left[\frac{x}{-a_1 r E^{-iw} t^{-\theta} x^2 + (a_1^2 + r^2)x - a_1 r E^{iw} t^{\theta}}\right]^s \\ &\times \frac{\sin\psi}{2z^2}\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \tan\!g\frac{\psi}{2}\right) f_1(t^{-\theta}x) f(z), \end{aligned}\right.$$

r, w, t étant maintenant des fonctions de z définies par les formules (7).

Posons, eu égard aux formules (6) et (7),

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \mu &= t^\theta \frac{a_1}{r} E^{iw} = \frac{1}{\varphi(z)}, \\ \nu &= t^\theta \frac{r}{a_1} E^{iw} = \frac{1}{\varphi(z)} \frac{r^2}{a_1^2}, \\ \alpha &= \frac{a}{a_1} < 1, \\ \varphi(z) &= \alpha \frac{\sin^2\frac{\psi}{2}}{z}\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2 \left[z E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\right]^{-\theta}. \end{aligned}\right.$$

Lorsque $|z| = 1$, on a

$$|\mu| > 1, \qquad |\nu| < 1;$$

car, w et r étant alors réels et $|t| = 1$, on a, puisque l'orbite de P_1 enveloppe l'orbite de P,

$$|\mu| = \frac{a_1}{r} > 1, \qquad |\nu| = \frac{r}{a_1} < 1.$$

En introduisant ces notations dans $F(x, z)$, il vient, en tenant compte des formules (7),

$$(11)'\quad F(x,z) = \left[\frac{\mu x}{-a_1^2(x-\mu)(x-\nu)}\right]^s \frac{1}{z}\frac{r}{a} f_1(t^{-\theta}x) f(z)$$

ou

$$(11)''\quad F(x,z) = \left\{\frac{x\varphi(z)}{-a_1^2[x\varphi(z) - 1]\left[x\varphi(z) - \frac{r^2}{a_1^2}\right]}\right\}^s \frac{1}{z}\frac{r}{a} f_1(t^{-\theta}x) f(z).$$

Dans ces formules le premier facteur élevé à la puissance s est l'expression de $\frac{1}{\Delta^s}$ en fonction de x et de z.

10. Les points singuliers de $F(x, z)$ en tant que fonction de x sont pour $|z| = 1$: les points $x = \infty$ et $x = \mu$, à l'extérieur de la circonférence $|x| = 1$, et, à l'intérieur de cette circonférence, les points $x = \nu$, $x = 0$.

Cela étant, considérons l'intégrale (10)

$$2i\pi J = \int_{|x|=1} \frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}\, dx.$$

J est une fonction uniforme de z lorsque $|z|$ est voisin de 1 ([1]). Quels sont les points singuliers de cette fonction? Ces points singuliers s'obtiennent en écrivant que deux des points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, en tant que fonction de x, l'un intérieur, l'autre extérieur au contour d'intégration, se confondent ([2]). Ils vérifient par suite les équations

$$\mu = 0, \qquad \nu = \infty, \qquad \mu = \nu.$$

On doit y joindre les valeurs $z = 0$, $z = \infty$ pour lesquelles le polynome $\frac{r}{az} f(z)$, en z et $\frac{1}{z}$ devient infini. Ces valeurs sont également des points critiques pour t^θ (8) et, par suite, pour $f_1(t^{-\theta}x)$ pour μ et pour ν (12) qui rentrent dans l'expression de $F(x, z)$.

L'équation $\mu = 0$ équivant (12) à $\varphi(z) = \infty$ qui n'admet pas de solutions en dehors de $z = 0$, $z = \infty$.

L'équation $\nu = \infty$, comme on s'en assure aisément en partant des formules (12) et (7), n'est vérifiée que par $z = 0$ et $z = \infty$.

L'équation $\mu = \nu$ se décompose en deux

$$r = a_1 \qquad \text{et} \qquad r = -a_1,$$

ou,

$$(13) \quad \begin{cases} \text{pour } r = a_1, & \alpha \sin\psi\, z^2 + 2(1 - \alpha)z + \alpha \sin\psi = 0; \\ \text{pour } r = -a_1, & \alpha \sin\psi\, z^2 - 2(1 + \alpha)z + \alpha \sin\psi = 0. \end{cases}$$

([1]) Se reporter au n° 7.

([2]) Poincaré, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282.

En résumé, les points singuliers de J sont : $z=0$, $z=\infty$ et les valeurs de z qui vérifient les équations (13).

11. *Application de la méthode de M. Darboux à* J. — Nous ferons ultérieurement suivre à z un chemin coupant l'axe des abscisses en deux points qui séparent respectivement les racines de chacune des équations (13). Ce chemin s'obtiendra en déformant la circonférence $|z|=1$, d'une façon continue, sans jamais rencontrer les points singuliers de J.

Pour ces valeurs de z, le point μ ne reste plus nécessairement à l'extérieur de la circonférence $|x|=1$, ni le point ν à l'intérieur. Mais on peut, à tout instant, déformer le contour le long duquel est prise l'intégrale J, de façon que μ demeure à l'extérieur, ν et l'origine à l'intérieur de ce contour. Effectivement, les passages compris entre l'origine et le point μ, entre le point ν et l'∞, entre les points μ et ν, que le contour traverse lorsque $|z|=1$, demeurent constamment libres, puisque z ne rencontre aucun des points singuliers de J. Il convient d'ajouter que le point ν ne peut venir se placer sur le prolongement de la droite qui joint l'origine au point μ (¹). Le point ν, en circulant, ne peut donc pas enrouler, autour du point μ, le contour le long duquel est prise l'intégrale J. Il en résulte que ce contour rencontre, en un seul point, la droite qui joint au point μ l'origine des x. Ce point peut donc servir à évaluer l'intégrale J, en appliquant la méthode de M. Darboux.

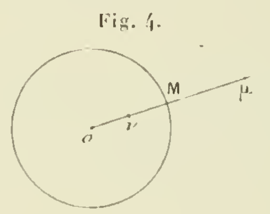
Le développement de $F(x,z)$, dans le voisinage de μ, est, en remplaçant $\frac{\mu-\nu}{\mu}$ par sa valeur déduite des formules (12),

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} F(x,z) &= \frac{1}{z}\frac{r}{a}f_1(t^{-\theta}\mu)f(z)(a_1^2-r^2)^{-s}\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-s} \\ &\quad\times\left[1+\text{des termes où}\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\text{entre en facteur}\right]. \end{aligned}\right.$$

(¹) Cela résulte de l'expression $\nu-\mu=-\mu(a_1^2-r^2)$ [form. (12)], qui permet de construire le point ν en partant du point μ, et de ce que celui des arguments de $a_1^2-r^2$ qui est nul, lorsque ce binome est réel, est toujours inférieur à π et supérieur à $-\pi$ (n° 20, *Remarque*).

Le produit $(a_1^2 - r^2)^{-s}\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s}$ est susceptible de deux déterminations puisque s est de la forme $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots$; il faut donc faire un choix préalable entre ces déterminations. Plaçons-nous à cet effet dans l'hypothèse où $|z| = 1$, cas où r est réel. Les formules (12) montrent que μ et ν ont même argument. Figurons ces points dans le plan, la circonférence $|x| = 1$ et le point M (*fig.* 4) où la droite $\mu\nu$ la rencontre. Lorsque x varie sur la droite $\mu\nu$, entre μ et ν, l'argument

Fig. 4.



de x, celui de $x - \mu$ et celui de $x - \nu$ demeurent invariables. L'expression (11)' de F(x, z) montre de suite que l'argument du facteur élevé à la puissance s est lui-même invariable. Or, lorsque x vient en M, le facteur en question est réel et positif comme égal à la distance réelle des planètes; il est donc réel et positif lorsque x est l'affixe d'un point quelconque du segment $\mu\nu$.

En convenant de prendre dans le développement (14) la détermination de $\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s}$ qui est réelle et positive le long de $o\mu$, la condition à laquelle nous venons d'arriver conduit à prendre celle des déterminations de $(a_1^2 - r^2)^{-s}$ qui est positive et réelle pour $|z| = 1$.

En partant de la formule (14), on a, d'après la méthode de M. Darboux [1],

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{z}\frac{r}{a} f_1(t^{-\theta}\mu) f(z)(a_1^2 - r^2)^{-s} \\ \times \Bigg[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s} \\ + \text{un terme de l'ordre de } \frac{m_1^{s-2}}{\mu^{m_1}}\Bigg]. \end{aligned}$$

[1] Se reporter au n° 2.

En remplaçant dans la formule ($\mathcal{A}$) (Introd.) a par μ, h par $-s$ et conservant seulement le terme principal, il vient, d'après les formules (12) et (7),

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} J = \dfrac{1}{m_1^{1-s}}\varphi^{m_1}(z)\Psi(z)\left(1+\dfrac{R}{m_1}\right), \\ \text{en faisant} \\ \Psi(z) = \dfrac{1}{z}\dfrac{r}{a}f_1\left[\dfrac{z}{\alpha\sin^2\frac{\psi}{2}\left(z-\cot\frac{\psi}{2}\right)^2}\right]f(z)\dfrac{(a_1^2-r^2)^{-s}}{\Gamma(s)}, \end{array}\right.$$

R restant fini lorsque m_1 augmente indéfiniment.

Cette expression de J n'est pas valable pour les valeurs $z=0$, $z=\infty$ ni pour les valeurs de z qui satisfont aux équations (13). Il faut y joindre la valeur $z=\cot\frac{\psi}{2}$ qui rend μ infini, car la méthode de M. Darboux ne s'applique que lorsque le point μ est à distance finie.

L'expression (15) de J est une identité, du moment où R est une fonction de z convenablement choisie. Nous répétons que cette fonction R reste finie lorsque m_1 augmente indéfiniment, d'après le théorème de M. Darboux, sauf pour les valeurs de z qui viennent d'être mentionnées.

La fonction $\varphi(z)$ (12) est holomorphe pour toute valeur de z, sauf pour $z=0$, $z=\infty$, et ne devient nulle que pour $z=0$, $z=\infty$, $z=\cot\frac{\psi}{2}$. J est holomorphe pour toute valeur de z, sauf pour $z=0$, $z=\infty$ et les racines des équations (13) (¹). D'après l'identité (15), la fonction $\left(1+\frac{R}{m_1}\right)\Psi(z)$ est donc holomorphe pour toute valeur de z, sauf pour $z=0$, $z=\infty$, $z=\cot\frac{\psi}{2}$, et pour les racines des équations (13). La fonction $R\Psi(z)$ jouit des mêmes propriétés, la fonction $\Psi(z)$ n'ayant manifestement pas de points singuliers en dehors de $z=0$, $z=\infty$, $z=\cot\frac{\psi}{2}$ et des valeurs de z qui annulent $a_1^2-r^2$, c'est-à-dire des racines des équations (13).

(¹) Se reporter au n° 10.

En résumé, les fonctions $\varphi(z)$, $\Psi(z)$, $R\Psi(z)$ sont holomorphes, sauf dans le voisinage des valeurs de z pour lesquelles l'expression (15) de J cesse d'être valable.

III.

12. La fonction $\varphi(z)$ joue un rôle essentiel dans la suite de ce travail. Nous commencerons par étudier sa dérivée.

On tire de l'équation (12)

$$(16) \qquad 2z^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = U(z),$$

en posant

$$(17) \qquad U(z) = \theta\sin\psi\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2 + 2z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right).$$

Discussion de l'équation $U(z) = 0$. — Cette équation, du troisième degré en z, peut se mettre sous la forme

$$\theta = -\frac{2}{\sin\psi}\,\frac{z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right)}{\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2};$$

on en tire

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{2}{\sin\psi}\,\frac{\left[\left(z - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)\left(2z + \cot\frac{\psi}{2}\right) - z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right)\right]\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right) - 2z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)}{\left(z - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^3}.$$

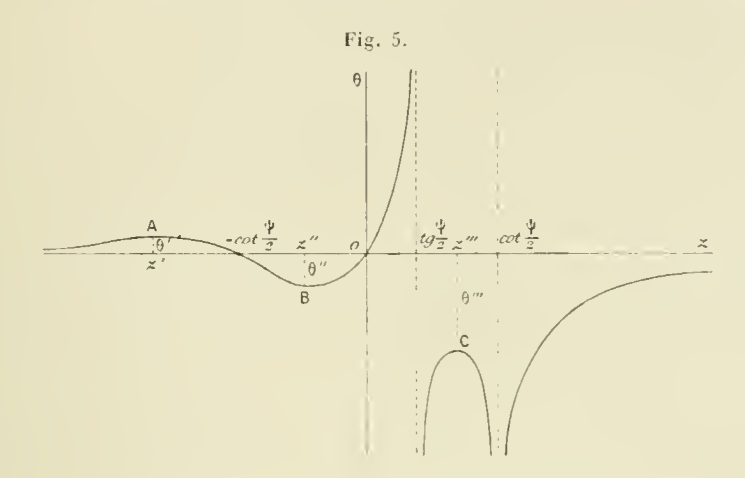
Le numérateur de $\frac{d\theta}{dz}$, du troisième degré en z, a ses racines réelles, savoir $z = z'\left(-\infty < z' < -\cot\frac{\psi}{2}\right)$, $z = z''\left(-\cot\frac{\psi}{2} < z'' < 0\right)$, $z = z'''\left(\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} < z''' < \cot\frac{\psi}{2}\right)$.

Nous trouverons plus loin z', z'', z''' et les valeurs correspondantes θ', θ'', θ''' de θ.

En considérant θ comme l'ordonnée d'une courbe dont z est l'abscisse, on construit immédiatement la *fig.* 5, en observant que l'ordonnée est maximum pour $z = z'$, minimum pour $z = z''$ et $z = z'''$.

En coupant la courbe par une parallèle à l'axe des abscisses, à une distance de cet axe égale à la valeur de θ qui figure dans l'équa-

Fig. 5.



tion $U = 0$, les racines de cette équation sont figurées géométriquement par les abscisses des points de rencontre.

Le nombre m_1 des formules (2) et (8) est positif par hypothèse. Supposons : 1° $m < 0$ et par conséquent $\theta < 0$.

On voit sur la *fig.* 5 que l'équation $U = 0$ a toujours une racine positive supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$ qui croît lorsque θ croît. Les deux autres racines sont : réelles et comprises entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{2}$ si θ est inférieur à l'ordonnée θ''' du point C; imaginaires si θ est compris entre θ''' et l'ordonnée θ'' du point B [1]; réelles et comprises entre $-\cot\frac{\psi}{2}$ et o si θ est supérieur à θ''.

Supposons : 2° $m > 0$, d'où $\theta > 0$.

L'équation $U = 0$ a toujours une racine positive comprise entre o et $\tang\frac{\psi}{2}$ qui croît avec θ. Les deux autres racines sont : réelles et comprises entre $-\infty$ et $-\cot\frac{\psi}{2}$ si $\theta < \theta'$; imaginaires si $\theta > \theta'$.

---

[1] θ''' est nécessairement inférieur à θ'', sans quoi l'équation aurait plus de trois racines pour les valeurs de θ comprises entre θ'' et θ'''.

Faisons dans (17)

(18) $$z = \cot\frac{\psi}{2}\,\frac{v+1}{v-1}.$$

L'équation $U = 0$ devient

(19) $$v^3 - (1 - 2\theta\cos\psi)v + 2\theta = 0.$$

Remarquons que

(20) $$\left\{\begin{array}{llll} v \text{ croissant de} & -\infty \text{ à } -1, & z \text{ décroît de} & \cot\frac{\psi}{2} \text{ à } 0, \\ \text{Id.} & -1 \text{ à } +1, & \text{Id.} & 0 \text{ à } -\infty, \\ \text{Id.} & +1 \text{ à } +\infty, & \text{Id.} & +\infty \text{ à } +\cot\frac{\psi}{2}. \end{array}\right.$$

Cela étant, pour que l'équation $U = 0$ ait une racine double, il faut et il suffit que l'équation (19) ait une racine double. θ', θ'', θ''' vérifient donc l'équation

(21) $$27\theta^2 = (1 - 2\theta\cos\psi)^3,$$

que l'on peut écrire, en prenant la racine cubique arithmétique des deux membres,

(21) $$\left[\frac{1}{\theta^{\frac{1}{3}}}\right]^3 - \frac{3}{\theta^{\frac{1}{3}}} - 2\cos\psi = 0.$$

Cette équation en $\frac{1}{\theta^{\frac{1}{3}}}$ a ses racines réelles : une racine positive et deux négatives.

Les formules de résolution de l'équation du troisième degré donnent

(22) $$\left\{\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{8}\operatorname{séc}^3\frac{\psi}{3}, \\ \theta'' &= -\frac{1}{8}\operatorname{séc}^3\left(60^\circ - \frac{\psi}{3}\right), \\ \theta''' &= -\frac{1}{8}\operatorname{séc}^3\left(60^\circ + \frac{\psi}{3}\right). \end{aligned}\right.$$

On trouvera, à la fin du présent Mémoire, une Table donnant les valeurs de θ', θ'', θ''' en fonction de l'excentricité $e = \sin\psi$.

15. Résolution de l'équation $U = o$:

1° Si $\theta < \theta'''$ les trois racines de l'équation $U = o$ sont réelles et positives; nous n'aurons, dans le cours de ce travail, à considérer que la plus petite.

Si $o > \theta > \theta''$ les trois racines sont réelles; deux sont négatives. Nous n'aurons à considérer que la plus petite de ces racines (la plus voisine de $-\infty$).

Si $o < \theta < \theta'$ les trois racines sont réelles; deux sont négatives. Nous n'aurons à considérer que la plus grande de ces racines négatives (la racine moyenne).

Dans ces trois hypothèses, la racine que nous venons de définir sera désormais désignée par Z. Elle a pour valeur

$$(23)\qquad Z = \cot\frac{\psi}{2}\,\frac{v+1}{v-1},$$

en posant

$$(24)\qquad \cos\chi = -\theta\left[\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}\right]^{-\frac{3}{2}},\qquad 0^\circ < \chi < 180^\circ,$$

et

$$(25)\qquad v = -2\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}}\cos\left(60^\circ + \frac{\chi}{3}\right).$$

Pour la démonstration de ce résultat nous renvoyons à l'addition annexée à ce Mémoire.

2° Lorsque les racines de l'équation $U = o$ ne seront pas toutes réelles, nous désignerons par Z_i et Z_{-i} ses racines imaginaires.

Si $\theta'' > \theta > \theta'''$ ou si $\theta' < \theta < \frac{1}{2\cos\psi}$ [1], ces racines sont données

---

[1] On a trouvé $\theta' = \frac{1}{8\cos^3\frac{\psi}{3}}$; d'autre part, $\cos\psi = 4\cos^3\frac{\psi}{3} - 3\cos\frac{\psi}{3}$. On a donc bien $\theta' < \frac{1}{2\cos\psi}$.

par les formules

$$(26)\quad \begin{cases} \sin 2\chi = -\frac{1}{\theta}\left[\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}\right]^{\frac{3}{2}}, \qquad \operatorname{tang}\xi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\chi}, \\ v = -\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}}\frac{1}{\sin 2\xi} + \sqrt{-1}\sqrt{1-2\theta\cos\psi}\cot 2\xi, \\ Z_i = \cot\frac{\psi}{2}\frac{v+1}{v-1}, \qquad Z_{-i} = \text{la conjuguée de } Z_i. \end{cases}$$

Si $\theta > \frac{1}{2\cos\psi}$, Z_i et Z_{-i} sont donnés par les formules

$$(26)\quad \begin{cases} \cot 2\chi = \theta\left[\frac{2\theta\cos\psi - 1}{3}\right]^{-\frac{3}{2}}, \qquad \operatorname{tang}\xi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\chi}, \\ v = \sqrt{\frac{2\theta\cos\psi - 1}{3}}\cot 2\xi + \sqrt{-1}\sqrt{2\theta\cos\psi - 1}\frac{1}{\sin 2\xi}, \\ Z_i = \cot\frac{\psi}{2}\frac{v+1}{v-1}, \qquad Z_{-i} = \text{la conjuguée de } Z_i. \end{cases}$$

3° Lorsque $\theta = \theta'$, θ'' ou θ''', l'équation $U = 0$ a une racine double. On peut en obtenir une expression simple.

En posant pour un moment

$$(28)\qquad \tau' = \theta'^{\frac{1}{3}}, \qquad \tau'' = \theta''^{\frac{1}{3}}, \qquad \tau''' = \theta'''^{\frac{1}{3}},$$

on a, d'après les formules (22),

$$(29)\qquad \frac{1}{2} < \tau' < \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad -1 < \tau'' < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad -\infty < \tau''' < -1.$$

On peut tirer la valeur de $\cos\psi$ de l'équation (21)' en fonction de τ', τ'' ou τ''' et exprimer, par suite, $\cot\frac{\psi}{2}$ en fonction de ces paramètres. On

trouve, en tenant compte des inégalités (29),

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \cot\frac{\psi}{2} &= \frac{1-\tau'}{1+\tau'}\sqrt{\frac{2\tau'+1}{2\tau'-1}},\\ \cot\frac{\psi}{2} &= \frac{1-\tau''}{1+\tau''}\sqrt{\frac{2\tau''+1}{2\tau''-1}},\\ \cot\frac{\psi}{2} &= -\frac{1-\tau'''}{1+\tau'''}\sqrt{\frac{2\tau'''+1}{2\tau'''-1}}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (19) et (21) donnent comme valeur de la racine double v :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{pour } \theta = \theta', && v = \tau',\\ &\text{pour } \theta = \theta'', && v = \tau'',\\ &\text{pour } \theta = \theta''', && v = \tau'''. \end{aligned}\right.$$

Les équations (18), (30), (31) conduisent ensuite à

$$z' = -\sqrt{\frac{2\tau'+1}{2\tau'-1}}, \qquad z'' = -\sqrt{\frac{2\tau''+1}{2\tau''-1}}, \qquad z''' = \sqrt{\frac{2\tau'''+1}{2\tau'''-1}}$$

ou, en tenant compte des formules (28) et (22),

$$(32)\quad z' = -\cot\frac{\psi}{6}, \quad z'' = -\operatorname{tang}\left(30^\circ - \frac{\psi}{6}\right), \quad z''' = +\operatorname{tang}\left(30^\circ + \frac{\psi}{6}\right);$$

z' correspondant à θ', z'' à θ'', z''' à θ'''. Telles sont les abscisses des points A, B, C de la *fig.* 5 qui ont pour ordonnées θ', θ'' et θ'''.

14. Lorsque $\theta < \theta'''$, la plus petite racine réelle Z de l'équation $U = 0$ est comprise entre $\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$ et 1 puisque $z''' < 1$.

Le produit des racines de l'équation $U = 0$ est indépendant de θ; d'ailleurs, lorsque θ croît de θ''' à θ'', la racine réelle croît comme l'indique la *fig.* 5; il faut donc, par compensation, que le module des racines imaginaires Z_i et Z_{-i} décroisse. Le module de ces racines reste donc compris entre z''' et $|z''|$; il est inférieur à 1.

Lorsque θ est compris entre θ'' et 0, la plus petite racine réelle Z de l'équation $U = 0$ est comprise entre $-\cot\frac{\psi}{2}$ et z''.

De là, il résulte que, pour $\theta < 0$, la valeur absolue de Z ou le module de Z_i et de Z_{-i} est compris entre $\cot\frac{\psi}{2}$ et $|z''|$. Pour que ce module soit compris entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{2}$, il suffit que $|z''| > \tang\frac{\psi}{2}$. En remplaçant z'' par sa valeur (32), on reconnaît que cette condition équivaut à $\psi < 45°$, c'est-à-dire à $e = \sin\psi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou $e < 0,707$. C'est ce qui a lieu dans toutes les applications. Nous pourrons donc supposer la valeur absolue de Z, ou le module de Z_i et de Z_{-i}, compris entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{2}$, lorsque $\theta < 0$.

Soit maintenant $\theta > 0$.

Si $0 < \theta < \theta'$, la racine moyenne Z de l'équation $U = 0$ est comprise entre $-\cot\frac{\psi}{2}$ et z'.

Lorsque θ croît à partir de θ', on voit comme précédemment que le module des racines imaginaires Z_i et Z_{-i} décroît. Pour $\theta = \infty$, ce module a pour valeur $\cot\frac{\psi}{2}$.

Ainsi, lorsque $\theta > 0$, la valeur absolue de Z ou le module de Z_i et de Z_{-i} est compris entre $\cot\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{6}$.

IV. — Étude du module de la fonction $\varphi(z)$.

On a

$$\varphi(z) = \alpha \sin^2\frac{\psi}{2}\,\frac{\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}{z}\left[z\,E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\right]^{-\theta}.$$

Posons $z = RE^{i\omega}$. On en déduit

$$(33)\quad |\varphi(z)| = \alpha \sin^2\frac{\psi}{2}\,\frac{R^2 - 2R\cot\frac{\psi}{2}\cos\omega + \cot^2\frac{\psi}{2}}{R}\left[RE^{-\frac{\sin\psi\cos\omega}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)}\right]^{-\theta}.$$

15. *Étude de* $|\varphi(z)|$ *le long de la circonférence de rayon* R. —

On tire de l'expression (33)

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{|\varphi(z)|}\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega} \\ &= \sin\omega\,\frac{4R^2\cot\frac{\psi}{2} - \theta\sin\psi(R^2-1)\left(R^2 - 2R\cot\frac{\psi}{2}\cos\omega + \cot^2\frac{\psi}{2}\right)}{2R\left(R^2 - 2R\cot\frac{\psi}{2}\cos\omega + \cot^2\frac{\psi}{2}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Le second membre a le signe de l'expression

$$(35)\quad \sin\omega\left[4R^2\cot\frac{\psi}{2} - \theta\sin\psi(R^2-1)\left(R^2 - 2R\cot\frac{\psi}{2}\cos\omega + \cot^2\frac{\psi}{2}\right)\right].$$

Supposons d'abord $\theta < 0$.

Si $R > 1$, le coefficient de $\sin\omega$ est toujours positif; $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$ a donc le signe de $\sin\omega$. Il en résulte que, le long de la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $\omega = \pi$, minimum pour $\omega = 0$.

Si $R < 1$, $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$ a le signe de

$$(36)\qquad \sin\omega(\cos\omega + P),$$

en posant

$$P = \frac{2R}{-\theta\sin\psi(1-R^2)} - \frac{R^2 + \cot^2\frac{\psi}{2}}{2R\cot\frac{\psi}{2}}.$$

Lorsque R décroît de 1 à 0, P décroît de $+\infty$ à $-\infty$, comme on s'en assure aisément. Appelons R_2 la valeur de R pour laquelle $P = -1$ et R_1 la valeur de R pour laquelle $P = 1$.

Si $R > R_1$, $\cos\omega + P$ est essentiellement positif; l'expression (36) devient nulle pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$. Il en résulte que, le long de la circonférence de rayon R, $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $\omega = \pi$, minimum pour $\omega = 0$.

Si $R_1 > R > R_2$, l'équation $\cos\omega + P = 0$ a une racine ω_1 entre 0 et π et une racine $2\pi - \omega_1$ entre π et 2π. $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$ a pour racines $\omega = 0$, $\omega = \omega_1$, $\omega = \pi$, $\omega = 2\pi - \omega_1$. Pour $\omega = 0$, $\cos\omega + P$ est positif; il en résulte que, le long de la circonférence R, $|\varphi(z)|$ passe par deux

maxima absolus égaux, correspondant à $\omega = \omega_1$ et $\omega = 2\pi - \omega_1$, et par deux minima qui correspondent à $\omega = 0$, $\omega = \pi$.

Si $R < R_2$, $\cos\omega + P$ est essentiellement négatif; les racines de $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$ sont 0 et π. $|\varphi(z)|$ est maximum absolu, le long de la circonférence R, pour $\omega = 0$, minimum pour $\omega = \pi$.

Soit en second lieu $\theta > 0$. — Nous n'examinerons que le cas où $R > \cot\frac{\psi}{2}\cdot$ Lorsque R croît depuis $\cot\frac{\psi}{2}$ jusqu'à $+\infty$, P diminue depuis $\frac{1}{\theta\cos\psi} - 1$ jusqu'à $-\infty$.

Lorsque $\frac{1}{\theta\cos\psi} - 1 > 1$, P prend toutes les valeurs comprises entre $+1$ et -1 quand R s'éloigne assez de $\cot\frac{\psi}{2}\cdot$ Appelons R'_1 la valeur de R pour laquelle $P = 1$, R'_2 la valeur de R pour laquelle $P = -1$; on a

$$\cot\frac{\psi}{2} < R'_1 < R'_2.$$

Lorsque $1 > \frac{1}{\theta\cos\psi} - 1 > -1$, P ne peut devenir égal à 1, mais prend la valeur -1 quand R est suffisamment éloigné de $\cot\frac{\psi}{2}\cdot$ Appelons encore R'_2 la valeur de R pour laquelle $P = -1$; on a

$$\cot\frac{\psi}{2} < R'_2.$$

Si $\cot\frac{\psi}{2} < R < R'_1$, $|\varphi(z)|$ est maximum absolu pour $\omega = \pi$, sur la circonférence R, minimum pour $\omega = 0$.

Si R reçoit l'une des valeurs pour lesquelles P est compris entre $+1$ et -1, $|\varphi(z)|$ passe par deux maxima égaux et absolus, le long de la circonférence R, pour $\omega = \omega'_1$ et $\omega = 2\pi - \omega'_1$; ω'_1 et $2\pi - \omega'_1$ étant les racines de $\cos\omega + P = 0$. $|\varphi(z)|$ est minimum pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$.

Si $R > R'_2$, $|\varphi(z)|$ est maximum absolu, sur la circonférence R, pour $\omega = 0$, minimum pour $\omega = \pi$.

16. 1° *Étude de* $|\varphi(z)|$ *le long de la partie négative de l'axe*

des abscisses. — Faisons $\omega = \pi$ dans l'équation (33); il vient

$$|\varphi(z)| = \alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \frac{\left(R + \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}{R} \left[R E^{\frac{\sin\psi}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)}\right]^{-\theta}.$$

On en tire

$$\frac{1}{|\varphi(z)|} \frac{d|\varphi(z)|}{dR}$$
$$= \frac{1}{2R^2\left(R + \cot\frac{\psi}{2}\right)} \left[2R\left(R - \cot\frac{\psi}{2}\right) - \theta \sin\psi \left(R + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(R + \cot\frac{\psi}{2}\right)^2\right].$$

Le facteur entre crochets donne son signe à $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$ puisque R est positif. Ce facteur s'obtient en changeant z en $-$ R dans $U(z)$ (17). Les valeurs absolues des racines réelles négatives de $U(z)$, s'il y en a, sont donc racines positives de $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$.

Soit d'abord $\theta < 0$: Si $\theta < \theta''$, $U(z)$ n'a pas de racines négatives et, par suite, $\frac{d|\varphi(z)|}{dR} > 0$; $|\varphi(z)|$ décroît donc lorsque la variable z marche dans le sens des abscisses croissantes.

Si $0 > \theta > \theta''$, $U(z)$ a toutes ses racines réelles et deux sont négatives. $|\varphi(z)|$ décroît, lorsque z marche dans le sens des abscisses croissantes, jusqu'à ce que z atteigne la plus petite racine Z, croît ensuite jusqu'à la seconde racine négative de $U(z)$ qui est inférieure à 1 en valeur absolue. Ainsi $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque z, décrivant l'axe des abscisses, passe par la plus petite racine Z de $U(z)$ qui annule $\varphi'(z)$. C'est là un point essentiel.

Soit en second lieu $\theta > 0$: Si $\theta < \theta'$, $U(z)$ a ses racines réelles, deux sont négatives. $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque z passe par la plus grande racine négative Z [racine moyenne de $U(z)$]; $|\varphi(z)|$ croît ensuite lorsque z va de Z à l'origine.

Si $\theta > \theta'$, $U(z)$ a des racines imaginaires et pas de racine négative; $|\varphi(z)|$ croît lorsque z marche dans le sens des abscisses croissantes.

2° *Étude de* $|\varphi(z)|$ *le long de la partie positive de l'axe des*

abscisses. — Faisons $\omega = 0$ dans l'équation (33); il vient

$$|\varphi(z)| = \alpha \sin^2\frac{\psi}{2}\,\frac{\left(R - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}{R}\left[R E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)}\right]^{-\theta}.$$

On en tire

$$\frac{1}{|\varphi(z)|}\,\frac{d|\varphi(z)|}{dR} = \frac{2R\left(R + \cot\frac{\psi}{2}\right) + \theta\sin\psi\left(R - \tang\frac{\psi}{2}\right)\left(R - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}{2R^2\left(R - \cot\frac{\psi}{2}\right)}.$$

Le numérateur du second membre donne son signe à l'expression $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$. Ce facteur s'obtient en changeant z en R dans U(z).

Soit d'abord $\theta < 0$: Il nous suffira de savoir comment varie $|\varphi(z)|$ lorsque $R < \cot\frac{\psi}{2}$ et $\theta < \theta'''$. U(z) a ses racines réelles et positives; $|\varphi(z)|$ ou, ce qui revient au même ici, $\varphi(z)$ décroît donc lorsque z croît à partir de zéro et devient minimum lorsque z passe par la plus petite racine Z de U(z), laquelle annule $\varphi'(z)$.

Soit en second lieu $\theta > 0$: Il nous suffira de savoir comment varie $|\varphi(z)|$ lorsque $R > \cot\frac{\psi}{2}$. U(z) n'a pas de racines supérieures à $\cot\frac{\psi}{2}$; $|\varphi(z)|$ croît donc lorsque z croît à partir de $\cot\frac{\psi}{2}$.

17. De cette discussion nous allons tirer quelques conséquences :

1° Admettons que l'équation $U(z) = 0$ ait ses racines réelles. Comment varie $|\varphi(z)|$ le long de la circonférence D ayant l'origine pour centre et passant par le point Z [1].

On vient de voir que $|\varphi(z)|$ devient minimum lorsque z, décrivant l'axe des abscisses, passe par le point Z. Il en résulte, puisque $\varphi'(z) = 0$, que $|\varphi(z)|$ devient maximum pour $z = Z$, lorsque z décrit un contour normal à l'axe des abscisses au point Z [2]. Ainsi $|\varphi(z)|$ passe par un maximum pour $z = Z$, lorsque z décrit la circonférence D. Ce maximum se produisant pour une valeur réelle de z est unique et absolu le long

---

[1] Se reporter au n° 14.

[2] Se reporter au n° 5.

de la circonférence ([1]). Nous arrivons ainsi à cette conclusion capitale que, lorsque la variable z suit la circonférence D, $|\varphi(z)|$ prend sa plus grande valeur au point Z pour lequel $\varphi'(Z) = 0$.

2° Plaçons-nous, en second lieu, dans l'hypothèse où l'équation $U = 0$ a des racines imaginaires. Figurons, dans le plan représentatif de la variable z, les racines Z_i et Z_{-i} et désignons maintenant par D la circonférence décrite de l'origine comme centre avec $|Z_i|$ pour rayon.

Je dis que $|\varphi(z)|$ passe par des maxima égaux et absolus lorsque z, cheminant sur la circonférence D, atteint les valeurs $z = Z_i$, $z = Z_{-i}$.

En effet, $\varphi'(z)$ étant nulle pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$, la dérivée de $|\varphi(z)|$ par rapport à la variable réelle indépendante dont dépend le point Z, le long du contour D, doit s'annuler lorsque cette variable atteint les valeurs qui rendent $z = Z_i$, $z = Z_{-i}$ ([2]).

La variable indépendante le long de D est l'argument ω de z, en sorte que, si ω_1 représente l'argument de Z_i, $\frac{d|\varphi(z)|}{d\omega}$ est nulle pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = 2\pi - \omega_1$. ω_1 est différent de zéro et de π; nous savons ([1]), dans ces conditions, que $|\varphi(z)|$ est maximum absolu le long de la circonférence D pour les valeurs $\omega = \omega_1$, $\omega = 2\pi - \omega_1$. C. Q. F. D.

Ainsi, lorsque la variable z décrit la circonférence D, $|\varphi(z)|$ prend sa plus grande valeur aux points $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$, pour lesquels $\varphi'(Z_i) = \varphi'(Z_{-i}) = 0$.

V.

18. Les racines des équations (13)

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha \sin\psi\, z^2 + 2(1-\alpha)z + \alpha\sin\psi = 0,\\ &\alpha \sin\psi\, z^2 - 2(1+\alpha)z + \alpha\sin\psi = 0 \end{aligned}\right.$$

sont réelles, du moment où les orbites des planètes ne se rencontrent pas en un point réel. Ces racines sont inverses deux à deux; celles de

([1]) Se reporter au n° 15.
([2]) Se reporter au n° 5.

la première équation sont négatives et moins écartées de la circonférence $|z| = 1$ que les racines de la seconde équation qui sont positives.

α étant inférieur à 1, les nombres $\tang \frac{\psi}{2}$, $\cot \frac{\psi}{2}$ sont intérieurs aux racines de la seconde équation; les nombres $-\tang \frac{\psi}{2}$, $-\cot \frac{\psi}{2}$ sont intérieurs aux racines de la première seulement lorsque $\alpha < \frac{1}{2}$.

Cela étant, considérons une circonférence, de rayon variable, concentrique à l'origine, coïncidant au point de départ avec la circonférence $|z| = 1$ et venant se confondre avec la circonférence D du Chapitre précédent. Cette circonférence variable ne rencontre pas, en chemin, les racines des équations (13) si $\theta < 0$ et $\alpha < \frac{1}{2}$, vu les limites entre lesquelles sont alors compris $|Z|$ ou $|Z_i|$ [1]. Mais, si θ et α ne vérifient pas ces inégalités, la circonférence variable peut rencontrer l'une des racines de chacune des équations (13). La première racine rencontrée appartient nécessairement à la première équation (13), puisque, des deux racines des équations (13) situées d'un même côté de la circonférence $|z| = 1$, la plus rapprochée de cette circonférence vérifie la première équation.

Définition. — Nous désignerons désormais par z_1 et z_2 ($z_1 < z_2 < 0$) les racines de la première équation (13) et par z'_1, z'_2 celles de la seconde ($z'_1 > z'_2 > 0$).

VI.

Revenons à l'intégrale (9) prise le long de la circonférence $|z| = 1$:

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int J \, dz.$$

On a vu [2] que J est une fonction uniforme dans le voisinage de la circonférence $|z| = 1$; ses points singuliers sont $z = 0$, $z = \infty$ et les racines des équations (13). On peut donc remplacer la circonférence

(1) Se reporter au n° 14.

(2) Se reporter au n° 8.

d'intégration $|z| = 1$ par un autre contour C, entourant l'origine, à condition que, dans l'intervalle compris entre C et la circonférence $|z| = 1$, les équations (13) n'aient pas de racines.

19. En choisissant convenablement le contour C, on parvient rapidement, dans deux cas particuliers que nous examinerons tout d'abord, à l'évaluation approchée de I.

1° L'équation $U(z) = 0$ a toutes ses racines réelles ($\theta < \theta'''$ ou $\theta'' < \theta < \theta'$) et de plus $|z_1| > |Z| > |z_2|$.

On peut prendre, comme nouveau contour C, la circonférence D décrite de l'origine comme centre avec $|Z|$ pour rayon. Effectivement, d'après l'hypothèse, on a, *a fortiori* (¹), $z'_1 > |Z| > z'_2$.

Il s'ensuit que J n'a pas de singularités dans l'espace compris entre la circonférence D et la circonférence $|z| = 1$, les intervalles compris entre $|z_1|$ et $|z_2|$, d'une part, entre z'_1 et z'_2, d'autre part, comprenant l'unité.

L'expression (15) de J est valable pour tous les points de la circonférence D. On peut donc écrire

$$I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\int_D \Psi(z)\left(1 + \frac{R}{m_1}\right)\varphi^{m_1}(z)\,dz.$$

Le maximum de $|\varphi(z)|$, le long de D, correspond à la valeur $z = Z$ qui annule $\varphi'(z)$ (²). L'expression approchée de I s'obtient donc, sur-le-champ, en appliquant le théorème II de l'Introduction. On trouve, en conservant seulement le terme principal et remarquant que le produit $R\,\Psi(z)$ est fini pour $z = Z$ (³),

$$(37)\qquad I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\sqrt{-2\frac{\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}}\sqrt{\frac{\pi}{m_1}}\Psi(Z)\,\varphi^{m_1}(Z)\left(1 + \frac{K}{m_1}\right),$$

K restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

2° L'équation $U(z) = 0$ a des racines imaginaires ($\theta''' < \theta < \theta''$ ou $\theta' < \theta$) et de plus $|z_1| > |Z_i| > |z_2|$.

(¹) Se reporter au n° 18.

(²) Se reporter au n° 17.

(³) Se reporter au n° 11 et au n° 4 (note).

On peut prendre comme nouveau contour C, pour les mêmes raisons que précédemment, la circonférence D ayant pour rayon $|Z_i| = |Z_{-i}|$. En remplaçant J par sa valeur (15), qui est valable pour tous les points du contour D, on a

$$I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \int_D \Psi(z)\left(1 + \frac{R}{m_1}\right) \varphi^{m_1}(z)\, dz.$$

Le long de D, $|\varphi(z)|$ passe par deux maxima absolus égaux pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$; on a en outre $\varphi'(Z_i) = \varphi'(Z_{-i}) = 0$ [1].

Il faut donc, pour avoir l'expression de I, faire la somme des résultats que l'on obtient en appliquant successivement le théorème II de l'Introduction aux points Z_i et Z_{-i}. Ainsi on a, en conservant seulement le terme principal et remarquant que $R\Psi(z)$ est fini pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$ [2]

$$(37)' \quad \left\{ \begin{aligned} I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \sqrt{\frac{\pi}{m_1}} \Bigg[& \sqrt{-2\frac{\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}}\, \Psi(Z_i)\, \varphi^{m_1}(Z_i) \\ & + \sqrt{-2\frac{\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}}\, \Psi(Z_{-i})\, \varphi^{m_1}(Z_{-i}) \Bigg] \left(1 + \frac{K'}{m_1}\right), \end{aligned} \right.$$

K′ restant fini lorsque m_1 augmente indéfiniment.

Remarque. — Les radicaux qui entrent dans les formules (37) et (37)′ ont un sens bien défini d'après la règle qui a été donnée dans l'Introduction. Il reste à choisir la détermination du facteur $(a_1^2 - r^2)^{-s}$ qui fait partie de Ψ.

On peut prendre l'argument de $a_1^2 - r^2$ égal à zéro pour $|z| = 1$, car $(a_1^2 - r^2)^{-s}$ est alors réel et positif [2]. Or on a (7) et (12)

$$\begin{aligned} a_1^2 - r^2 = -\frac{a_1^2}{4z^2} & [\alpha \sin\psi\, z^2 + 2(1-\alpha)z + \alpha \sin\psi] \\ & \times [\alpha \sin\psi\, z^2 - 2(1+\alpha)z + \alpha \sin\psi]. \end{aligned}$$

Les deux facteurs entre crochets sont les premiers membres des

---

[1] Se reporter au n° 17.

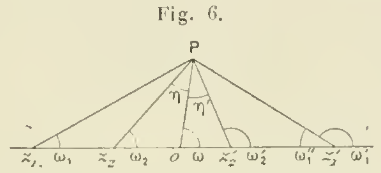
[2] Se reporter au n° 11 et au n° 4 (note).

équations (13). Figurons leurs racines en z_1, z_2, z'_2, z'_1, et joignons un point P du plan à ces points et à l'origine (*fig.* 6). L'argument de $a_1^2 - r^2$ lorsque la variable z occupe la position P a pour valeur

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega'_2 + \omega'_1 - 2\omega - \pi.$$

En effet, si le point P vient sur l'axe des abscisses à une distance de l'origine égale à 1 (P est alors, soit entre z'_2 et z'_1, soit entre z_1 et z_2), Ω est bien nul.

Fig. 6.



Des relations faciles entre les angles marqués sur la figure permettent d'écrire

$$\Omega = \omega_1 - \omega''_1 + \eta' - \eta.$$

Mais, dans le triangle $z_1 \mathrm{P} z'_1$, on a

$$\omega_1 + \eta + \eta' + \omega''_1 < \pi;$$

on peut donc écrire *a fortiori*

$$|\Omega| < \pi.$$

Si le point P est sur un contour assujetti à rencontrer l'axe des abscisses seulement entre les points z_1, z_2 et entre les points z'_1, z'_2, condition que réalise un contour équivalent, pour l'intégrale I, à la circonférence $|z| = 1$, cette inégalité a lieu dans toutes les positions de P.

Le véritable argument du facteur $(a_1^2 - r^2)^{-s}$ s'obtient donc en multipliant par $-s$ l'argument de $a_1^2 - r^2$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

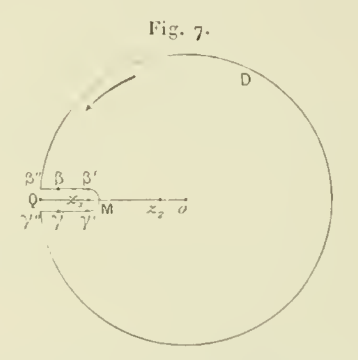
20. Lorsque $|Z|$ ou $|Z_i|$ n'est pas compris entre $|z_1|$ et $|z_2|$, on peut encore prendre la circonférence D comme nouveau chemin d'intégra-

tion, à condition de la déformer comme on l'indiquera bientôt. Mais on n'arrive plus aussi directement que précédemment à la détermination de l'intégrale I. Il convient alors de décomposer I en deux parties et d'évaluer séparément chacune de ces parties.

Supposons d'abord $|Z|$ ou $|Z_i|$ supérieur à $|z_1|$ ($|z_1|$ étant supérieur à 1, cette hypothèse correspond nécessairement à $\theta > \theta''$) (¹). Le nouveau chemin d'intégration doit être construit de façon à ne pas renfermer le point z_1.

Décrivons (*fig.* 7) du point z_1 comme centre une demi-circonférence $\beta' M \gamma'$, avec un rayon très petit. Menons à l'axe des abscisses

Fig. 7.



les parallèles $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$, limitées à la circonférence D. Prenons, sur ces droites, des points β, γ, symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du point z_1, mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de z_1, soit valable jusqu'en β, γ.

Le rayon de la circonférence $\beta' M \gamma'$ étant très petit, les angles $\beta z_1 M$, $\gamma z_1 M$ sont voisins de π.

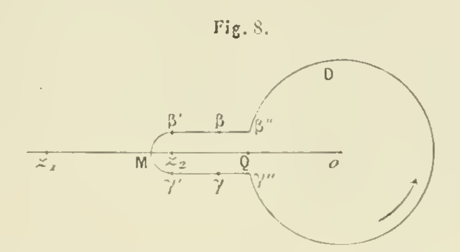
Le contour $M\gamma'\gamma\gamma'' D \beta''\beta\beta' M$, que nous désignerons par C, est équivalent à la circonférence $|z| = 1$ pour l'intégrale I. Toutefois, ce nouveau contour, qui contient toujours la plus petite racine z'_2 de la seconde équation (13), ne doit pas renfermer la plus grande racine z'_1 de cette équation. Cette circonstance peut se présenter lorsque $\theta > 0$ (¹); mais nous verrons au nº **21** qu'il n'y a pas lieu de s'en préoccuper.

(¹) Se reporter aux nºs **14** et **18**.

Supposons maintenant $|Z|$ ou $|Z_i|$ inférieur à $|z_2|$ ($|z_2|$ étant inférieur à 1, cette hypothèse correspond nécessairement à $0 < o$) (¹). Le nouveau contour doit être construit de façon à renfermer le point z_2.

Décrivons (*fig.* 8), du point z_2 comme centre, une demi-circonférence $\beta' M \gamma'$, avec un rayon très petit. Menons, à l'axe des abscisses, les parallèles $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ limitées à la circonférence D. Prenons sur ces

Fig. 8.



droites des points β, γ, symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du point z_2, mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de z_2, soit valable jusqu'en β, γ.

Le contour $M\gamma'\gamma\gamma''D\beta''\beta\beta'M$ que nous désignerons par C, comme précédemment, est équivalent à la circonférence $|z| = 1$ pour l'intégrale I. La circonférence D renferme en effet, dans notre hypothèse, la plus petite racine z'_2 de la seconde équation (13) et ne contient pas la plus grande racine z'_1 de cette équation (¹).

Nous désignerons dorénavant par C' le contour $\beta\beta' M\gamma'\gamma$ et par C'' le contour $\gamma\gamma'' D\beta''\beta$ (*fig.* 7 et 8). Nous appellerons I' la partie de l'intégrale I qui correspond au contour C', et I'' la partie de l'intégrale I qui correspond au contour C''.

Détermination de I''. — Tous les points du contour C'' sont à distance finie du point z_1 (*fig.* 7) ou du point z_2 (*fig.* 8). On peut donc, dans l'intégrale

$$I'' = \int_{C''} J\,dz,$$

(¹) Se reporter aux nos 14 et 18.

remplacer J par sa valeur (15), ce qui donne

$$(38) \qquad \mathrm{I}'' = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}''} \Psi(z) \left[1 + \frac{\mathrm{R}(z)}{m_1}\right] \varphi^{m_1}(z)\, dz.$$

Avant d'évaluer I″, il convient de remarquer que la plus grande valeur de $|\varphi(z)|$ le long de $\beta''\beta$ et de $\gamma''\gamma$, savoir $|\varphi(\beta)| = |\varphi(\gamma)|$, est inférieure à $|\varphi(z_1)|$ (*fig.* 7) ou à $|\varphi(z_2)|$ (*fig.* 8). $|\varphi(z)|$ croît effectivement lorsque z décrit le segment $\mathrm{Q}z_1\mathrm{M}$ (*fig.* 7) puisque le point M, très rapproché de z_1, est compris entre z_1 et -1 (¹). De même, $|\varphi(z)|$ croît lorsque z décrit le segment $\mathrm{Q}z_1\mathrm{M}$ (*fig.* 8), le sens $\mathrm{Q}z_1\mathrm{M}$ étant le sens des abscisses décroissantes (¹).

Ainsi on a, dans le cas de la *fig.* 7,

$$|\varphi(\beta'')| < |\varphi(\beta)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(\mathrm{M})|,$$
$$|\varphi(\gamma'')| < |\varphi(\gamma)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(\mathrm{M})|;$$

dans le cas de la *fig.* 8,

$$|\varphi(\beta'')| < |\varphi(\beta)| < |\varphi(z_2)| < |\varphi(\mathrm{M})|,$$
$$|\varphi(\gamma'')| < |\varphi(\gamma)| < |\varphi(z_2)| < |\varphi(\mathrm{M})|.$$

Rappelons enfin que la plus grande valeur de $|\varphi(z)|$, le long de la circonférence D, est $|\varphi(\mathrm{Z})|$ si l'équation $\mathrm{U} = 0$ a ses racines réelles et $|\varphi(\mathrm{Z}_i)|$ si cette équation a des racines imaginaires (²).

Pour donner à l'expression de I″ sa forme définitive, nous distinguerons trois cas.

Premier cas. — 1° La plus grande valeur de $|\varphi(z)|$ le long du contour C″ est inférieure à $|\varphi(z_1)|$ (*fig.* 7) dans les deux hypothèses suivantes :

$\theta' > \theta > \theta''$ (U a ses racines réelles) et $\mathrm{Z} < z_1$;

$\theta > \theta'$ (U a des racines imaginaires), $|\mathrm{Z}_i| > |z_1|$ et $|\varphi(\mathrm{Z}_i)| < |\varphi(z_1)|$.

(¹) Se reporter au n° 16.

(²) Se reporter au n° 17.

2° La plus grande valeur de $|\varphi(z)|$ le long du contour C″ est inférieure à $|\varphi(z_2)|$ (*fig.* 8) dans les trois hypothèses suivantes :

$$0 > \theta > \theta'' \text{ (U a ses racines réelles) et } Z > z_2;$$
$$\theta'' > \theta > \theta''' \text{ (U a des racines imaginaires), } |Z_i| < |z_2| \text{ et } |\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_2)|;$$
$$\theta < \theta''' \text{ (U a ses racines réelles), } Z < |z_2| \text{ et } \varphi(Z) < |\varphi(z_2)|.$$

Pour obtenir I″, dans ce cas, nous appliquerons un théorème dû à M. Darboux (¹). En désignant par τ un facteur de module inférieur à 1, par l'' la longueur du chemin C″ et par ξ l'affixe d'un point convenable de ce contour, l'intégrale (38) peut se mettre sous la forme

$$(38)' \qquad I'' = \tau l'' \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \Psi(\xi)\left[1 + \frac{R(\xi)}{m_1}\right]\varphi^{m_1}(\xi).$$

Il importe de remarquer que l'on a :

Dans le cas de la *fig.* 7

$$|\varphi(\xi)| < |\varphi(z_1)|;$$

dans le cas de la *fig.* 8

$$|\varphi(\xi)| < |\varphi(z_2)|;$$

ces inégalités ne pouvant d'ailleurs pas se transformer en égalités.

Deuxième cas. — Supposons que l'une des deux circonstances suivantes se présente

$$\theta > \theta' \text{ (U a des racines imaginaires), } |Z_i| > |z_1| \text{ et } |\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_1)|;$$
$$\theta'' > \theta > \theta''' \text{ (U a des racines imaginaires), } |Z_i| < |z_2| \text{ et } |\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_2)|.$$

Les plus grandes valeurs de $|\varphi(z)|$ le long du contour C″ correspondent alors aux racines $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$ de $\varphi'(z)$. On peut donc obtenir l'expression de I″ en appliquant le théorème II de l'Introduction à l'intégrale (38), comme on l'a déjà fait pour arriver à la formule (37)′.

(¹) Cours de M. Hermite, 4ᵉ édition, p. 65; Hermann.

Ainsi on peut prendre comme valeur de I''

$$(38)''\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{I}'' = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\sqrt{\frac{\pi}{m_1}}\Bigg[& \sqrt{-2\frac{\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}}\,\Psi(Z_i)\,\varphi^{m_1}(Z_i) \\ & + \sqrt{-2\frac{\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}}\,\Psi(Z_{-i})\,\varphi^{m_1}(Z_{-i})\Bigg]\left(1+\frac{\mathrm{K}''}{m_1}\right),\end{aligned}\right.$$

K'' restant fini lorsque m_1 augmente indéfiniment.

TROISIÈME CAS. — On a

$$0 < \theta''' \;(\mathrm{U} \text{ a ses racines réelles}),\quad Z < |z_2| \quad \text{et} \quad \varphi(Z) > |\varphi(z_2)|.$$

La plus grande valeur de $|\varphi(z)|$ le long du contour C'' correspond à la racine $z = Z$ de $\varphi'(z)$. On peut donc obtenir l'expression I'' en appliquant le théorème II de l'Introduction à l'intégrale (38), comme on l'a déjà fait pour parvenir à la formule (37).

Ainsi, dans ce troisième cas, on peut prendre comme valeur de I''

$$(38)'''\qquad \mathrm{I}''' = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\sqrt{-2\frac{\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}}\sqrt{\frac{\pi}{m_1}}\,\Psi(Z)\,\varphi^{m_1}(Z)\left(1+\frac{\mathrm{K}'''}{m_1}\right),$$

K''' restant fini lorsque m_1 augmente indéfiniment.

Remarque. — On voit que I'' est de la forme

$$\mathrm{I}'' = m_1^{s-1}\,\mathrm{G}''(\xi'')\,\varphi^{m_1}(\xi'');$$

la fonction G'' restant finie lorsque m_1 augmente indéfiniment et ξ'' représentant, ξ dans le premier cas, Z_i dans le second cas, Z dans le troisième cas.

On peut effectivement, dans la formule (38)'', mettre $\varphi^{m_1}(Z_i)$ en facteur et faire rentrer, dans G'', le facteur

$$1 + \left[\frac{\varphi(Z_{-i})}{\varphi(Z_i)}\right]^{m_1},$$

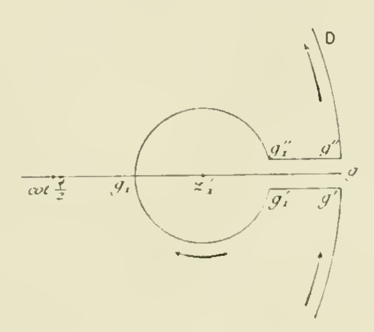
qui reste fini, lorsque m_1 augmente indéfiniment, puisque

$$|\varphi(Z_i)| = |\varphi(Z_{-i})|.$$

21. Nous avons admis implicitement, lorsque $\theta > 0$, que la plus grande racine z'_1 de la seconde équation (13) est extérieure à la circonférence D. Il est facile de s'affranchir de cette restriction.

Considérons le point g où la circonférence D (*fig.* 9) rencontre la partie positive de l'axe des abscisses. On a $|\varphi(g)| < |\varphi(Z)|$ ou $|\varphi(g)| < |\varphi(Z_i)|$ puisque, suivant que U a ou non ses racines réelles, $|\varphi(z)|$ est maximum, le long de la circonférence D, pour $z = Z$ ou pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$.

Fig. 9.



Si g est plus éloigné de l'origine que le point singulier z'_1 de J, il est *a fortiori* à une distance de l'origine supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$ ([1]). On a donc, pour tout point z pris sur le segment $z'_1 g$ de l'axe des abscisses ([2]), $|\varphi(z)| < |\varphi(g)|$ et, *a fortiori*,

$$|\varphi(z)| < |\varphi(Z)| \quad \text{ou} \quad |\varphi(z)| < |\varphi(Z_i)|,$$

suivant que l'équation $U = 0$ a ou non ses racines réelles. Il en est de même si le point z est pris le long des droites $g' g'_1$, $g'' g''_1$, très voisines de l'axe des abscisses.

Décrivons, autour de z'_1, une circonférence de rayon fini $g'_1 g_1 g''_1$ rencontrant l'axe des abscisses en un point g_1, situé à une distance de l'origine supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$. En vertu de la continuité de la fonction $\varphi(z)$, on peut choisir le rayon de cette circonférence de façon que, pour tout point z pris sur cette ligne, la différence $|\varphi(z)| - |\varphi(z'_1)|$

(1) Se reporter au n° 18.
(2) Se reporter au n° 16.

ne dépasse pas un nombre fini donné. On peut donc faire en sorte que, le long de l'arc $g'_1 g_1 g''_1$,

$$|\varphi(z)| < |\varphi(Z)| \qquad \text{ou} \qquad |\varphi(z)| < |\varphi(Z_i)|,$$

suivant que U a ou non ses racines réelles.

En faisant subir à la circonférence D la déformation $g' g'_1 g_1 g''_1 g''$, le point z'_1 reste à l'extérieur du contour C. Comme tous les points de cette déformation sont à distance finie du point z'_1 et du point $\cot\frac{\psi}{2}$, l'expression (15) de J est valable, comme auparavant, pour tous les points du contour C″, modifié comme il vient d'être dit.

Les résultats précédemment acquis, en ce qui regarde I″, sont fondés sur ce que la plus grande valeur de $|\varphi(z)|$, le long de la circonférence D, est $|\varphi(Z)|$ ou $|\varphi(Z_i)|$. L'introduction dans le contour C″ du chemin $g' g'_1 g_1 g''_1 g''$, le long duquel $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(Z)|$ ou à $|\varphi(Z_i)|$, ne modifie donc en rien nos conclusions.

Il reste, pour avoir la valeur complète de I dans les cas énumérés n° **20** du présent Chapitre, à déterminer la valeur de I′. Cette question va faire l'objet des Chapitres qui suivent.

VII. — Transformation de la fonction $F(x, z)$.

Posons

$$(39) \qquad x_1 = \frac{1}{\varphi(z_1)}, \qquad x_2 = \frac{1}{\varphi(z_2)}.$$

Nous nous proposons de mettre la fonction $F(x, z)$ sous une forme particulière dans le voisinage des valeurs $z = z_1$, $x = x_1$ d'une part, $z = z_2$, $x = x_2$ d'autre part.

22. Supposons z voisin de z_1 et x de x_1.

La valeur (11)″ de $F(x, z)$ contient l'expression du carré de la distance des planètes

$$(40) \qquad \Delta = -a_1^2 \frac{[x\varphi(z) - 1]\left[x - \frac{r^2}{a_1^2}\frac{1}{\varphi(z)}\right]}{x},$$

élevé à la puissance $-s$.

Δ est une fonction holomorphe de $x - x_1$ et de $z - z_1$ dans un certain domaine. r^2 devenant égal à a_1^2 pour $z = z_1$ (1), cette fonction a deux racines égales à z_1 pour $x = x_1$.

Il résulte de là que, pour x voisin de x_1, Δ a deux racines σ', σ'' voisines de z_1 et que l'on peut poser identiquement (2)

$$(41) \qquad \Delta = (z - \sigma')(z - \sigma'') \times \frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)}.$$

Dans cette formule, le polynome $(z - \sigma')(z - \sigma'')$ a pour coefficients des fonctions holomorphes de $x - x_1$; la fonction $\frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)}$ est holomorphe en $z - z_1$ et $x - x_1$, dans un certain domaine, et ne s'annule pas pour $x = x_1$, $z = z_1$. Il en résulte que $H(z - z_1, x - x_1)$ ne s'annule pas pour $x = x_1$, $z = z_1$ et est elle-même holomorphe en $z - z_1$, $x - x_1$ dans un certain domaine.

Il est aisé de calculer les racines σ', σ'' des équations

$$x\varphi(z) - 1 = 0, \qquad x\varphi(z) - \frac{r^2}{a_1^2} = 0,$$

considérées comme équations en z, lorsque x est voisin de x_1.

L'équation $x\varphi(z) - 1 = 0$ peut s'écrire

$$x = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(z_1)} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi^2(z_1)}(z - z_1)$$
$$- \frac{\varphi(z_1)\varphi''(z_1) - 2\varphi'^2(z_1)}{2\varphi^3(z_1)}(z - z_1)^2 + \dots.$$

On en tire, en introduisant les notations (39),

$$-\frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}\frac{x - x_1}{x_1} = (z - z_1)\left\{1 + \left[\frac{\varphi''(z_1)}{2\varphi'(z_1)} - 2\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}\right](z - z_1) + \dots\right\};$$

---

(1) Se reporter aux nos 10 et 18.

(2) POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 316 et 317. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 241.

d'où

$$z - z_1 = -\frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \frac{x - x_1}{x_1} \left\{ 1 + \left[\frac{\varphi''(z_1)}{2\varphi'(z_1)} - 2\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \right] (z - z_1) + \ldots \right\}^{-1}.$$

On déduit de là $z - z_1$, par la série de Lagrange, et

$$(42) \qquad \sigma' = z_1 - \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \frac{x - x_1}{x_1} + \ldots.$$

On obtient le développement de la racine σ'' voisine de z_1 de l'équation $x - \frac{r^2}{a_1^2} \frac{1}{\varphi(z)} = 0$ en procédant d'une façon analogue. On commence par développer $\frac{r}{a_1}$ (7) suivant les puissances de $z - z_1$. En remarquant que $\frac{r}{a_1} = 1$ pour $z = z_1$, on a

$$\frac{r}{a_1} = 1 - \frac{\alpha \sin\psi}{2 z_1^2} (z_1^2 - 1)(z - z_1) + \ldots;$$

d'où

$$x = \frac{r^2}{a_1^2} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(z_1)} - \left[\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi^2(z_1)} + \frac{1}{\varphi(z_1)} \frac{\alpha \sin\psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1) \right] (z - z_1) + \ldots.$$

On en déduit, en raisonnant comme précédemment,

$$(43) \qquad \sigma'' = z_1 - \frac{1}{\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \frac{\alpha \sin\psi}{z_1^2} (z_1^2 - 1)} \frac{x - x_1}{x_1} + \ldots.$$

Les coefficients des puissances de $\frac{x - x_1}{x_1}$, dans les développements (42), (43) de σ' et de σ'', sont réels. En effet, r est une fonction réelle de z (7); $\frac{1}{\varphi(z)}$ et $\frac{r^2}{a_1^2} \frac{1}{\varphi(z)}$ ont donc même argument lorsque z est réel. Mais il y a plus : étant donnée la forme de $\varphi(z)$ (12), cet argument est invariable pour toutes les valeurs de z réelles négatives; il est égal, par conséquent, à l'argument de x_1 et de x_2 (39).

Cela posé, en donnant à σ' une valeur réelle négative *quelconque* voisine de z_1, l'équation (42) doit être identiquement vérifiée lorsque l'on y remplace x par la valeur, $\frac{1}{\varphi(\sigma')}$, qui a même argument que x_1.

Or $\dfrac{x-x_1}{x_1}$ est alors réel; il faut donc, puisque le premier membre est réel, que les coefficients du développement soient eux-mêmes réels.

De même les coefficients de σ'' sont réels ainsi que les coefficients des développements

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} h &= \frac{\sigma'+\sigma''}{2} = z_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + \frac{1}{\dfrac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \dfrac{\alpha\sin\psi}{z_1^2}(z_1^2-1)}\right]\frac{x-x_1}{x_1} + \ldots, \\ k &= \left(\frac{\sigma'-\sigma''}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{\dfrac{\alpha\sin\psi}{z_1^2}(z_1^2-1)\dfrac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}}{\dfrac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \dfrac{\alpha\sin\psi}{z_1^2}(z_1^2-1)}\right]^2\left(\frac{x-x_1}{x_1}\right)^2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

La formule (41) peut s'écrire

$$(45)\qquad \Delta = -\frac{a_1^2[x\varphi(z)-1]\left[x\varphi(z)-\dfrac{r^2}{a_1^2}\right]}{x\varphi(z)} = \frac{(z-h)^2-k}{H(z-z_1,\, x-x_1)}.$$

La valeur $H(0,0)$ de $H(z-z_1, x-x_1)$, pour $z-z_1 = x-x_1 = 0$, s'obtient en tirant $H(z-z_1, x-x_1)$ de l'identité (45), faisant $x=x_1$ et levant l'indétermination, pour $z=z_1$, en appliquant deux fois la règle de l'Hospital. On obtient, en tenant compte des formules (39),

$$(46)\qquad \frac{1}{H(0,0)} = -a_1^2\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}\left[\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \alpha\sin\psi\,\frac{z_1^2-1}{z_1^2}\right].$$

25. La fonction $F(x,z)$ (11)$''$ peut s'écrire, d'après la formule (45),

$$F(x,z) = \left[\frac{H(z-z_1,\, x-x_1)}{(z-h)^2-k}\right]^s \frac{1}{z}\,\frac{r}{a}\,f_1(t^{-\theta}x)\,f(z)$$

ou

$$(47)\qquad F(x,z) = \frac{\lambda^{(s)}(z-z_1,\, x-x_1)}{[(z-h)^2-k]^s},$$

$\lambda^{(s)}(z-z_1, x-x_1)$ étant holomorphe pour les valeurs assez petites de $x-x_1$ et de $z-z_1$. Cette fonction est définie par

$$(48)\quad \lambda^{(s)}(z-z_1,\, x-x_1) = [H(z-z_1,\, x-x_1)]^s\,\frac{1}{z}\,\frac{r}{a}\,f_1(t^{-\theta}x)\,f(z).$$

Sa valeur pour $x = x_1$ et $z = z_1$ est, en tenant compte des formules (46), (39), (12), (8), (7) et se rappelant que $r = a_1$ pour $z = z_1$,

$$(49)\qquad \lambda^{(s)}(0, 0) = [\mathrm{H}(0, 0)]^s \frac{1}{\alpha z_1} f_1 \left[\frac{z_1}{\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(z_1 - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2} \right] f(z_1).$$

Nous définirons en temps utile la détermination du facteur $[\mathrm{H}(0, 0)]^s$ qui rentre dans cette formule.

$\lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1)$ est développable suivant les puissances de $z - z_1$ et de $x - x_1$ et h suivant les puissances de $x - x_1$; cette fonction est donc développable suivant les puissances de $z - h$ puisque h se réduit à z_1 pour $x = x_1$ (44). Ainsi on peut écrire

$$(50)\qquad \mathrm{F}(x, z) = \frac{\mathrm{D}_0 + (z - h)\mathrm{D}_1 + (z - h)^2 \mathrm{D}_2 + \ldots}{[(z - h)^2 - k]^s},$$

les fonctions de x, D_0, D_1, ... étant holomorphes en $x - x_1$.

La valeur de la fonction D_0 pour $x = x_1$ n'est autre que $\lambda^{(s)}(0, 0)$ (49), puisque, pour $x = x_1$, h se réduit à z_1.

Remarque. — Les formules (16) et (17) donnent

$$(51)\qquad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\mathrm{U}(z)}{2 z^2 \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right)}.$$

Le rapport $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est donc réel lorsque z est réel.

Reportons-nous à la *fig.* 7 qui est relative au cas où l'on a $|\mathrm{Z}| > |z_1|$ si $\mathrm{U}(z)$ a ses racines réelles ou $|\mathrm{Z}_i| > |z_1|$ si $\mathrm{U}(z)$ a des racines imaginaires. Appelons y l'affixe d'un point quelconque pris sur l'axe des abscisses entre les points Q et z_1. Il est aisé de voir que l'on a

$$\mathrm{U}(y) < 0\ (^1);$$

il en résulte

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > 0.$$

(1) Se reporter aux définitions de la circonférence D (n° 17) de Z et de Z_i (n° 14) et s'appuyer sur ce que (17) $\mathrm{U}(-\infty)$ a le signe de $-\theta$.

On a donc, en observant que $y < z_1 < -1$,

$$(52) \qquad o < \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} < \alpha \sin\psi \frac{y^2 - 1}{y^2} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

Ces inégalités sont d'ailleurs applicables pour $y = z_1$. Il en résulte que $H(o, o) < o$ (46) lorsque $|Z|$ ou $|Z_i|$ est supérieur à $|z_1|$.

24. Le développement de $F(x, z)$ dans le voisinage de $x = x_2$ et de $z = z_2$ se déduit du développement (50) en y changeant x_1 en x_2 et z_1 en z_2.

La nouvelle constante $\lambda^{(s)}(o, o)$ se déduit de la formule (49) en y changeant x_1 en x_2 et z_1 en z_2. La nouvelle constante $H(o, o)$ se déduit de la formule (46) en y changeant x_1 en x_2 et z_1 en z_2; elle est négative lorsque $|Z|$ ou $|Z_i|$ est inférieur à $|z_2|$.

Si, en effet, on se reporte à la *fig.* 8 et que l'on désigne par y l'affixe d'un point quelconque pris sur l'axe des abscisses entre les points Q et z_2, on a $U(y) > o$ et, par suite, $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} < o$. On a donc, en observant que $-1 < z_2 < y < o$,

$$(52)' \qquad o > \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > \alpha \sin\psi \frac{y^2 - 1}{y^2} + \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

Ces inégalités sont applicables pour $y = z_2$. Il en résulte bien $H(o, o) < o$, comme précédemment.

VIII.

25. J est défini par l'intégrale (10) prise le long du contour $|x| = 1$, lorsque $|z| = 1$. Dans cette hypothèse, l'élément différentiel de J, en tant que fonction de x, possède à l'intérieur du contour $|x| = 1$ deux points singuliers, l'origine et le point ν et, à l'extérieur, le point μ et l'∞. Si l'on donne à z des valeurs de module différent de 1, à l'exception des valeurs $z = o$, $z = \infty$ et de celles qui satisfont aux équations (13), on peut toujours modifier le contour de façon que le

point μ ne puisse y pénétrer ni le point ν et l'origine en sortir ([1]).

C'est en particulier ce que l'on peut faire, lorsque z est l'affixe d'un point du chemin C′ ([2]), qui a été obtenu en déformant la circonférence $|z| = 1$, sans rencontrer les racines des équations (13). z étant alors voisin de l'une des racines des équations (13), on peut faire suivre, dans le plan des x, à la variable d'intégration de J, une circonférence ayant son centre à l'origine et de rayon supérieur aux quantités voisines $|\mu|$, $|\nu|$, à la condition de déformer cette circonférence, dans le voisinage des points μ et ν, de façon que μ soit à l'extérieur et ν à l'intérieur de ce contour. Effectivement, à part $x = 0$, $x = \infty$, les seuls points qui limitent la déformation du contour, le long duquel est prise l'intégrale J, sont les points μ et ν.

Voici encore une remarque qui sera utilisée dans le cours de ce Chapitre.

Prenons, dans le plan de la variable z, un point quelconque M sur la partie négative de l'axe des abscisses, entre les points z_1, z_2. Au z de M correspond, dans le plan de la variable x, un point μ et un point ν qui sont en ligne droite avec les points x_1, x_2 et l'origine ([3]). Soit N un point quelconque de cette droite $\mu\nu$ pris entre les points μ et ν. Je dis que le facteur $\frac{1}{\Delta^s}$, qui fait partie de $F(x, z)$ ([4]), que l'on peut écrire

$$\frac{1}{\Delta^s} = \left[\frac{\mu x}{-a_1^2(x-\mu)(x-\nu)}\right]^s,$$

est réel et positif lorsque l'on y remplace x par l'x de N et z par le z de M.

En effet, l'argument de $\frac{1}{\Delta^s}$ est indépendant de la position de N sur le segment de droite dont les extrémités sont μ et ν, les arguments de x, $x - \mu$, $x - \nu$ demeurant invariables lorsque le point N se déplace sur le segment.

L'argument de μ et de ν conserve aussi la même valeur quelle que

---

([1]) Se reporter au n° 11.

([2]) Se reporter au n° 20.

([3]) Se reporter au n° 22 après la formule (43).

([4]) Se reporter au n° 9.

soit, dans le plan de la variable z, la position de M sur le segment $z_1 z_2$ de l'axe des abscisses.

Cela étant, prenons un point M particulier, le point $z = -1$. Les points μ et ν qui correspondent, dans le plan de la variable x, à $z = -1$ sont séparés par la circonférence $|x| = 1$; on peut donc prendre le point N à la rencontre de cette circonférence avec la droite $x_1 x_2$.

Or $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ est réel et positif pour $|x| = 1$ et $|z| = 1$, comme égal à la distance réelle de deux points pris sur les orbites des planètes P, P_1. $\frac{1}{\Delta^s} = \frac{1}{[\sqrt{\Delta}]^{2s}}$ est donc bien réel et positif pour l'x de N et le z de M.

26. Ces principes posés, occupons-nous de I'. Considérons le cas où le contour C' est voisin du point z_1 (¹). On a vu que

$$|\varphi(\beta)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(M)|$$

et que

$$|\varphi(\gamma)| < |\varphi(z_1)| < |\varphi(M)|.$$

Figurons, dans le plan de la variable z, l'axe des abscisses, les points z_1, z_2 et le contour C' (*fig.* 10). A chaque point z pris sur ce contour

Fig. 10.

correspondent, dans le plan de la variable x, des positions particulières pour les points μ, ν. Nous allons construire le lieu de ces points lorsque z décrit le contour C' et mettre à cet effet les expressions de μ et de ν sous des formes particulières.

1° *z est un point de la très petite circonférence* $\beta' M \gamma'$. — La formule de Taylor et les expressions (12), (7), (39) donnent, en observant que $r = a_1$, pour $z = z_1$,

$$(53)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu - x_1}{x_1} = -\dfrac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}(z - z_1), \\[2ex] \dfrac{\nu - x_1}{x_1} = -\left[\dfrac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} + \dfrac{\alpha \sin\psi}{z_1^2}(z_1^2 - 1)\right](z - z_1). \end{cases}$$

(¹) Se reporter au n° 20.

2° *z est un point de* $\beta\beta'$. — Appelons ε l'ordonnée positive du point z, qui est constante le long de $\beta\beta'$, et y son abscisse; on a

$$z = y + \varepsilon\sqrt{-1}.$$

En appelant $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$ le résultat obtenu en remplaçant z par y dans la dernière formule (7) et posant

$$(54) \qquad x' = \frac{1}{\varphi(y)},$$

on peut écrire, en développant les formules (12) et (7) suivant les puissances de la très petite quantité ε,

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mu - x'}{x'} &= -\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\varepsilon\sqrt{-1}, \\ \frac{\nu - x'}{x'} &= \left(\frac{r}{a_1}\right)_y^2 - 1 - \left[\alpha \sin\psi \frac{y^2 - 1}{y^2} + \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right]\left(\frac{r}{a_1}\right)_y \varepsilon\sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

3° *z est un point de* $\gamma\gamma'$. — Changer ε en $-\varepsilon$ dans les formules (55).

Remarque. — Les coefficients de $\varepsilon\sqrt{-1}$ dans les formules (55) sont réels puisque y est réel (51). On a d'ailleurs les inégalités

$$(56) \qquad \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \left[\alpha \sin\psi \frac{y^2 - 1}{y^2} + \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right] > \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > 0.$$

En effet, elles sont vérifiées en vertu des inégalités (52) lorsque l'on y remplace $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$ par l'unité. Elles le sont donc *a fortiori* lorsqu'on laisse $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$, car $\left(\frac{r}{a_1}\right)_y$ est supérieur à 1 lorsque y est inférieur à z_1. Cela résulte de ce que

$$\frac{r}{a_1} - 1 = -\frac{\alpha \sin\psi (z - z_1)(z - z_2)}{2z} \text{ (}^1\text{)},$$

expression évidemment positive pour les valeurs réelles de z inférieures à z_1.

---

(1) Se reporter aux formules (7) et au n° 18.

Au surplus, on peut supposer β assez près de z_1, tout en restant à distance finie de ce point, pour que la plus grande valeur de $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$, lorsque z chemine sur $\beta\beta'$, soit inférieure à la plus petite valeur de

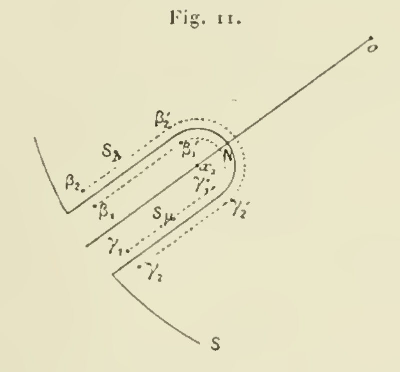
$$\left(\frac{r}{a_1}\right)_y \left[\alpha \sin\psi \frac{y^2-1}{y^2} + \left(\frac{r}{a_1}\right)_y \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right]$$

le long de $\beta\beta'$.

Cela posé, traçons dans le plan de la variable x la droite qui joint l'origine au point $x_1 = \frac{1}{\varphi(z_1)}$ et construisons le lieu du point μ, S_μ, lorsque z décrit le contour C' (*fig.* 10).

L'argument de $\varphi(z)$ est invariable pour toutes les valeurs réelles et négatives de z (¹). Lorsque z chemine sur $\beta\beta'$, le point x' (54) chemine sur Ox_1 à une distance de l'origine supérieure à Ox_1 puisque, y étant inférieur à z_1, $|\varphi(y)| < |\varphi(z_1)|$. Cela étant, le point μ décrit, dans le plan de la variable x, une courbe $\beta_1\beta'_1$ très voisine de ox_1 (55) (*fig.* 11), lorsque z décrit $\beta\beta'$; μ décrit ensuite une demi-

Fig. 11.



circonférence autour de x_1 (53), lorsque z décrit la demi-circonférence $\beta'M\gamma'$. Le correspondant du point M sur la demi-circonférence $\beta'_1\gamma'_1$ est situé sur ox_1 entre x_1 et l'origine, car $|\varphi(M)| > |\varphi(z_1)|$. Le diamètre $\beta'_1\gamma'_1$ est d'ailleurs perpendiculaire sur ox_1. Lorsque z décrit $\gamma'\gamma$, μ décrit une courbe $\gamma'_1\gamma_1$ très voisine de ox_1 et symétrique de $\beta_1\beta'_1$ par rapport à ox_1.

On construirait de la même façon le lieu $\beta_2\beta'_2\gamma'_2\gamma_2$ du point ν. En vertu des inégalités (56) et des remarques qui les suivent, les points

(¹) Se reporter au n° 22, après la formule (43).

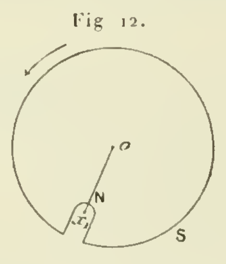
de $\beta_2\beta'_2$ sont tous plus éloignés de ox_1 que les points de $\beta_1\beta'_1$; le rayon de la demi-circonférence $\beta'_2\gamma'_2$ est supérieur au rayon de la demi-circonférence $\beta'_1\gamma'_1$.

De ce qui précède il résulte que les trajectoires $S_\mu S_\nu$ des points μ et ν sont ouvertes en β_1, γ_1, β_2, γ_2 et n'ont pas de points communs (¹).

27. Le contour le long duquel est prise, dans le plan de la variable x, l'intégrale qui définit J doit être déformé, pour chaque valeur de z, prise sur le chemin C', de telle sorte que le point μ soit à l'extérieur, le point ν et l'origine à l'intérieur du contour. Dans le cas actuel, l'intégrale J peut être prise le long d'un contour S, *invariable quelle que soit la position du point z sur le chemin* C'. Ce contour S est constitué par une circonférence, décrite de l'origine comme centre avec un rayon supérieur à ox_1 (²), déformée de façon que la courbe S_ν soit à l'intérieur de S et la courbe S_μ à l'extérieur.

La partie du contour S voisine de x_1 est représentée en traits pleins (*fig.* 11). Dans la *fig.* 12 le contour S est représenté en entier.

Fig 12.



Le point N où ce contour rencontre ox_1 est très près de x_1, entre x_1 et l'origine.

On peut écrire (³), en remplaçant J par sa valeur (10), (11),

$$I' = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} dz\,\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{F(x,z)}{x^{m_1+1}}\,dx.$$

La fonction $\frac{F(x,z)}{x^{m_1+1}}$ est bien déterminée, finie et continue le long des

---

(¹) Il aurait pu arriver que le point μ, correspondant à une certaine valeur de z, coïncidât avec le point ν correspondant à une autre valeur de z.

(²) Se reporter au n° 25.

(³) Se reporter au n° 20.

contours C′ et S (*fig.* 12). Cette circonstance, jointe à ce que les intégrations par rapport aux variables complexes sont au fond des intégrations par rapport à des variables réelles, rend légitime le changement de l'ordre des intégrations. Effectivement, le contour S ne dépendant pas de z, les limites de l'intégrale relative à x sont des constantes, aussi bien que les limites de l'intégrale relative à z. Ainsi on peut écrire

(57) $$\mathrm{I}' = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{S}} \frac{\Phi(x)}{x^{m_1+1}}\,dx,$$

en faisant

$$\Phi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}'} \mathrm{F}(x, z)\,dz.$$

On est ramené à trouver, pour m_1 très grand, la valeur de l'intégrale (57).

Le problème est complètement transformé au point de vue analytique : la déformation du contour S n'est plus limitée maintenant, dans le voisinage du point $x = x_1$, que par les points singuliers de la fonction $\Phi(x)$.

Je dis que le point $x = x_1$ est un point singulier de $\Phi(x)$. Pour l'établir il faut montrer que, lorsque x tend vers x_1, deux points singuliers de $\mathrm{F}(x, z)$, en tant que fonction de z, séparés par le contour C′, tendent l'un vers l'autre [1].

Considérons la partie irrationnelle de $\mathrm{F}(x, z)$, à savoir le facteur $\frac{1}{\Delta^s}$. Pour x voisin de x_1 et z voisin de z_1, Δ est donnée par la formule (45)

$$\Delta = \frac{(z-h)^2 - k}{\mathrm{H}(z - z_1, x - x_1)}.$$

Les valeurs de z voisines de z_1 qui annulent le numérateur sont des points singuliers de $\mathrm{F}(x, z)$, en tant que fonction de z.

Remplaçons, dans cette expression, x par l'affixe de N (*fig.* 12); h et k ont alors des valeurs réelles [2].

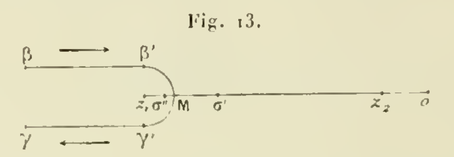
---

[1] Poincaré, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282.

[2] Se reporter au n° 25 et à ce qui a été dit à propos des formules (42), (43), (44).

$\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}$ étant réel (51), le premier terme de la seconde formule (44) est positif; k est donc positif puisque l'x de N est très voisin de x_1. Il en résulte que les racines σ' et σ'' (42) et (43) du numérateur de Δ sont réelles. Figurons-les sur l'axe des abscisses, dans le plan de la variable z (*fig.* 13), en σ' et σ'' (¹).

Fig. 13.



Pour démontrer que le point M, où le contour C' rencontre l'axe des abscisses, est compris entre σ' et σ'', il suffit d'établir que le z de ce point rend négatif le trinome $(z-h)^2-k$.

Δ est réel et positif lorsque l'on y remplace x par l'affixe de N et z par l'affixe de M (²); il faut donc établir que la valeur de la fonction $H(z-z_1, x-x_1)$ pour l'x de N et le z de M, qui est nécessairement réelle, est négative. Or, comme M est très près de z_1 et N de x_1 le signe de $H(z-z_1, x-x_1)$ est le même que celui de $H(0,0)$ et l'on a démontré que $H(0,0)<0$, à propos des inégalités (52). C. Q. F. D.

Cela étant, si l'on fait tendre x vers x_1, en suivant Nx_1 (*fig.* 12), les points singuliers σ' et σ'' de $F(x,z)$ tendent l'un et l'autre vers le point z_1, en restant sur l'axe des abscisses. Il devient impossible d'empêcher ces points de venir sur le contour C' (*fig.* 13), lorsque x arrive en x_1; le point $x=x_1$ est donc un point singulier de $\Phi(x)$.

IX. — Développement de la fonction $\Phi(x)$.

28. Nous supposerons pour obtenir commodément ce développement que le point représentatif de la variable x coïncide avec le point N de la *fig.* 12 placé très près de x_1, sur ox_1, entre x_1 et l'origine.

(¹) En partant des inégalités (52) et en tenant compte de ce que le point N (*fig.* 12) est plus près de l'origine que x_1, on reconnaît aisément que les points z_1, σ', σ'' occupent la position indiquée *fig.* 13.

(²) Se reporter au nº 25.

En remplaçant $F(x, z)$ par son expression (50), il vient

$$\Phi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{D_0 + (z-h)D_1 + (z-h)^2 D_2 + \ldots}{[(z-h)^2 - k]^s}\,dz,$$

D_0, D_1, ... étant des fonctions holomorphes de $x - x_1$ et D_0 n'étant pas nul pour $x = x_1$ (50).

En posant

(58)
$$J_p^{(s)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{(z-h)^p}{[(z-h)^2 - k]^s}\,dz,$$

on a

(59)
$$\Phi(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} D_p J_p^{(s)}.$$

Les intégrales $J_p^{(s)}$ peuvent s'exprimer en fonction des intégrales $J_p^{(\frac{1}{2})}$. On a en effet l'identité

(60)
$$J_p^{(s)} = \frac{2^{s-\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2s-2)}\,\frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}}\,J_p^{(\frac{1}{2})}.$$

29. *Calcul de* $J_0^{(\frac{1}{2})}$ (¹). — On a

$$2i\pi J_0^{(\frac{1}{2})} = \int_{C'} \frac{dz}{\sqrt{(z-h)^2 - k}} = \left\{\log\left[z - h + \sqrt{(z-h)^2 - k}\right]\right\}_{C'}.$$

$\sqrt{\Delta}$ est réel et positif lorsque l'on y remplace z par le z du point M (*fig.* 13) (²); il en résulte, pour les valeurs particulières de x et de z que nous considérons,

$$\frac{\sqrt{(z-h)^2 - k}}{\sqrt{H(0,0)}} > 0 \ (^3).$$

Les deux termes de la fraction sont des imaginaires sans parties réelles; si donc on convient de prendre comme détermination de

(¹) Cette intégrale a été étudiée par M. Poincaré, *loc. cit.*, t. I, p. 322.

(²) Se reporter au nº 25.

(³) Se reporter aux nºs 23 et 27.

$\sqrt{\mathrm{H}(0,0)}$ celle dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, on devra prendre aussi pour détermination de $\sqrt{(z-h)^2-k}$ au point M celle dont le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, c'est-à-dire celle qui a $\frac{\pi}{2}$ pour argument.

Le contour C′ (*fig.* 13) renfermant le point singulier σ'' du radical et les points β et γ étant très près de l'axe des abscisses par rapport à $\beta\sigma'$, l'argument du radical au point β est supérieur de $\frac{\pi}{2}$, à très peu près, à l'argument de cette fonction au point M. La valeur du radical au point β est donc, à très peu près, réelle et négative; de même la valeur du radical au point γ est, à très peu près, réelle et positive.

Il résulte de ce qui précède que

$$2i\pi\,\mathrm{J}_0^{(\frac{1}{2})} = \log\frac{\gamma-h+\sqrt{(\gamma-h)^2-k}}{\beta-h-\sqrt{(\beta-h)^2-k}},$$

en convenant de prendre, pour détermination des radicaux, celle dont la partie réelle est positive.

Le point $z=h$ étant compris au milieu du segment $\sigma'\sigma''$, les parties réelles de $\gamma-h$, $\beta-h$ sont négatives; donc le dénominateur de la fraction est fini, même pour $x=x_1$, puisque sa partie réelle est finie.

Multiplions les deux termes de la fraction par l'expression finie $\gamma-h-\sqrt{(\gamma-h)^2-k}$, il vient

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} 2i\pi\,\mathrm{J}_0^{(\frac{1}{2})} = \log k &- \log\left[\beta-h-\sqrt{(\beta-h)^2-k}\right] \\ &- \log\left[\gamma-h-\sqrt{(\gamma-h)^2-k}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les deux derniers logarithmes népériens écrits dans le second membre sont des fonctions holomorphes de $x-x_1$. En effet, pour $x=x_1$, h se réduit à z_1 et k à zéro; donc, pour $x-x_1$ assez petit, les radicaux sont des fonctions holomorphes de $x-x_1$, les différences $\beta-z_1$, $\gamma-z_1$ étant finies. Ainsi les fonctions sous les signes log sont holomorphes et non nulles pour $x=x_1$. Il en résulte bien que ces logarithmes sont des fonctions holomorphes de $x-x_1$ pour des valeurs de $x-x_1$ suffisamment petites, mais finies.

Mais il y a plus : les dérivées de ces logarithmes par rapport à k sont

aussi des fonctions holomorphes de $x - x_1$. C'est ce qu'on voit sur-le-champ en remarquant que les dérivées de $\log\left[\beta - h - \sqrt{(\beta-h)^2 - k}\right]$, par exemple, sont formées d'une somme d'expressions contenant en numérateur un coefficient numérique et en dénominateur le produit d'une puissance positive de $\sqrt{(\beta-h)^2-k}$ par une puissance positive de $\left[\beta - h - \sqrt{(\beta-h)^2-k}\right]$.

30. *Calcul de* $J_p^{(s)}$. — 1° *p est impair.*

On a

$$(62)\qquad 2i\pi J_1^{(s)} = \int_\beta^\gamma \frac{z-h}{[(z-h)^2-k]^s}\,dz = -\frac{1}{2(s-1)}\left\{\frac{1}{[(z-h)^2-k]^{s-1}}\right\}_\beta^\gamma.$$

$J_1^{(s)}$ est une fonction holomorphe de $x - x_1$ puisque $[(z-h)^2-k]^{-s}$ devient une fonction holomorphe de $x - x_1$ lorsqu'on y remplace z par β ou par γ.

En partant de l'identité

$$\frac{d}{dz}(z-h)^{p-1}[(z-h)^2-k]^{-s+1} = \frac{(p-2s+1)(z-h)^p-(p-1)k(z-h)^{p-2}}{[(z-h)^2-k]^s},$$

on trouve, en intégrant entre les limites β, γ,

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned}&(p-2s+1)J_p^{(s)}-(p-1)kJ_{p-2}^{(s)}\\ &\quad=\frac{1}{2i\pi}\left\{(z-h)^{p-1}[(z-h)^2-k]^{-s+1}\right\}_\beta^\gamma.\end{aligned}\right.$$

Le second membre de cette équation est holomorphe en $x - x_1$.

En partant de la formule (62) et calculant de proche en proche $J_p^{(s)}$ pour $p = 3, 5, 7, \ldots$, au moyen de l'équation (63), on reconnaît aisément que $J_p^{(s)}$ est holomorphe en $x - x_1$, lorsque p est impair.

2° *p est pair.* — Faisons $s = \frac{1}{2}$ dans l'équation (63). Il vient

$$pJ_p^{(\frac{1}{2})}-(p-1)kJ_{p-2}^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2i\pi}\left[(z-h)^{p-1}\sqrt{(z-h)^2-k}\right]_\beta^\gamma.$$

En multipliant par des facteurs convenables les relations obtenues

en faisant dans cette équation de récurrence successivement

$$p = 2, \quad 4, \quad 6, \quad \ldots, \quad p,$$

il vient

$$p\,J_p^{(\frac{1}{2})} - \frac{1.3.5\ldots(p-1)}{2.4\ldots(p-2)} k^{\frac{p}{2}} J_0^{(\frac{1}{2})}$$
$$= \frac{1}{2i\pi} \sum \left[\frac{(p-1)(p-3)\ldots(q+1)}{(p-2)(p-4)\ldots q} k^{\frac{p-q}{2}} (z-h)^{q-1} \sqrt{(z-h)^2 - k} \right]_\beta^\gamma,$$

le nombre q, dans le second membre, devant prendre toutes les valeurs entières paires depuis 2 jusqu'à p. Cette équation et l'équation (61) donnent

$$2i\pi\, J_p^{(\frac{1}{2})} = \frac{1.3\ldots(p-1)}{2.4\ldots p} k^{\frac{p}{2}} \log k + \Phi_p^{(\frac{1}{2})},$$

en posant

$$\Phi_p^{(\frac{1}{2})} = -\frac{1.3\ldots(p-1)}{2.4\ldots(p-2)p} k^{\frac{p}{2}} \log\left[\beta - h - \sqrt{(\beta-h)^2 - k}\right]\left[\gamma - h - \sqrt{(\gamma-h)^2 - k}\right]$$
$$+ \sum_p \left[\frac{(p-1)(p-3)\ldots(q+1)}{p(p-2)\ldots q} k^{\frac{p-q}{2}} (z-h)^{q-1} \sqrt{(z-h)^2 - k} \right]_\beta^\gamma.$$

En vertu d'une remarque déjà faite, cette fonction $\Phi_p^{(\frac{1}{2})}$ est holomorphe en $x - x_1$ ainsi que ses dérivées par rapport à k. La formule (60) permet donc d'écrire

$$2i\pi\, J_p^{(s)} = \frac{2^{s-\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2s-2)} \frac{1.3\ldots(p-1)}{2.4\ldots p} \frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} \left(k^{\frac{p}{2}} \log k\right)$$
$$+ \text{fonction holomorphe de } x - x_1.$$

Le calcul de la dérivée qui fait partie de cette expression comprend deux cas :

Soit $\frac{p}{2} \geqq s - \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} \left(k^{\frac{p}{2}} \log k\right) = \log k \frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}} k^{\frac{p}{2}} + \text{fonction entière de } k$$
$$= \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{p}{2} - s + \frac{3}{2}\right) k^{\frac{p}{2} - s + \frac{1}{2}} \log k$$
$$+ \text{fonction holomorphe de } x - x_1,$$

et

$$2i\pi\,\mathrm{J}_p^{(s)} = \frac{1.3\ldots(p-1)}{1.3\ldots(2s-2)}\,\frac{p(p-2)\ldots(p-2s+3)}{p(p-2)\ldots 2}\,k^{\frac{p-2s+1}{2}}\log k$$
$$+ \text{ fonction holomorphe de } x - x_1,$$

ou, en remarquant que $\log k$ peut s'écrire, en vertu de la seconde formule (44),

$$\log k = 2\log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) + \text{ fonction holomorphe de } x - x_1,$$

$$(64)\qquad \begin{cases} 2i\pi\,\mathrm{J}_p^{(s)} = \dfrac{2s(2s+2)\ldots(p-1)}{2.4\ldots(p-2s+1)}\,2k^{\frac{p-2s+1}{2}}\log\left(1 - \dfrac{x}{x_1}\right) \\ \qquad + \text{ fonction holomorphe de } x - x_1. \end{cases}$$

Cette formule convient, même lorsque $s = \frac{1}{2}$ et $p = 0$, mais à condition de remplacer, dans ce cas, le facteur $\frac{2s(2s+2)\ldots(p-1)}{2.4\ldots(p-2s+1)}$ par 1.

Soit en second lieu $0 \leqq \frac{p}{2} \leqq s - \frac{3}{2}$. On a

$$\frac{d^{s-\frac{1}{2}}}{dk^{s-\frac{1}{2}}}\left(k^{\frac{p}{2}}\log k\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)\cdots 1\,\frac{d^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}\log k}{dk^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}$$
$$+ \text{ fonction holomorphe de } x - x_1$$
$$= \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}\,\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)\ldots 1.1.2\ldots\left(s - \frac{3}{2} - \frac{p}{2}\right)$$
$$+ \text{ fonction holomorphe de } x - x_1.$$

Il en résulte

$$2i\pi\,\mathrm{J}_p^{s} = -\frac{(-2)^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}{(p+1)(p+3)\ldots(2s-2)}\,1.2\ldots\left(s - \frac{3}{2} - \frac{p}{2}\right)\frac{1}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}$$
$$+ \text{ fonction holomorphe de } x - x_1.$$

$$(64)'\qquad \begin{cases} 2i\pi\,\mathrm{J}_p^{(s)} = 2\,\dfrac{2.4\ldots(2s-3-p)}{(p+1)(p+3)\ldots(2s-2)}\,\dfrac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}} \\ \qquad + \text{ fonction holomorphe de } x - x_1. \end{cases}$$

Cette formule convient, même lorsque $s = \frac{3}{2}$ et $p = 0$, à la condition de remplacer alors le facteur $\frac{2.4\ldots(2s-3-p)}{(p+1)(p+3)\ldots(2s-2)}$ par l'unité.

51. Les formules (64), (64)′ et (59) conduisent au développement suivant de $\Phi(x)$ dans le domaine du point $x = x_1$,

$$(65)\quad \begin{cases} 2i\pi\Phi(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{p=2s-3} 2\,\frac{2.4\ldots(2s-3-p)}{(p+1)(p+3)\ldots(2s-2)}\,\frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}\,\mathrm{D}_p \\ \qquad + \log\left(1-\dfrac{x}{x_1}\right)\displaystyle\sum_{p=2s-1}^{p=\infty} 2\,\frac{2s(2s+2)\ldots(p-1)}{2.4\ldots(p-2s+1)}\,k^{\frac{p+1}{2}-s}\,\mathrm{D}_p + \Phi_1(x) \end{cases}$$

$\Phi_1(x)$ désignant une fonction holomorphe dans le domaine de $x = x_1$ et l'entier p ne devant recevoir que des valeurs paires positives, y compris zéro.

Cherchons, dans la partie non holomorphe du développement (65), le terme qui contient la plus petite puissance de $x - x_1$.

Ce terme correspond évidemment à $p = 0$; il y a d'ailleurs deux cas à distinguer :

1° Si $s = \frac{1}{2}$, le premier signe Σ disparaît du développement (65) et le premier terme du second signe Σ a pour valeur

$$2\mathrm{D}_0 \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \qquad \left(s = \frac{1}{2}\right).$$

D_0 est une fonction holomorphe de $x - x_1$; son terme constant, pour $s = \frac{1}{2}$, a pour valeur $\lambda^{\left(\frac{1}{2}\right)}(0, 0)$ (49) et (50). Le terme que nous cherchons est donc

$$2\lambda^{\left(\frac{1}{2}\right)}(0, 0)\log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right).$$

Ainsi on peut écrire le développement (65) pour $s = \frac{1}{2}$,

$$(66)\quad \begin{cases} \Phi(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\Phi_1(x) + \dfrac{\lambda^{\left(\frac{1}{2}\right)}(0, 0)}{i\pi}\log\left(1 - \dfrac{x}{x_1}\right) \\ \qquad \times\left[1 + \left(1 - \dfrac{x}{x_1}\right)\times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \dfrac{x}{x_1}\right)\right]. \end{cases}$$

2° Si $s \geqq \frac{3}{2}$, le terme du développement (65) qui correspond à $p = 0$

est sous le premier signe Σ. Il a pour expression

$$2\,\frac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)}\,\frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}}}\,\mathrm{D}_0.$$

Le terme que nous cherchons s'obtient en remplaçant D_0 par son terme constant $\lambda^s(0,0)$ (49), et k par son premier terme (44).

Le terme demandé est donc

$$2\,\frac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)}(-1)^{s-\frac{3}{2}}\lambda^s(0,0)\left[\frac{1+\dfrac{z_1^2}{\alpha\sin\psi(z_1^2-1)}\,\dfrac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}}\right]^{2s-1}\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{x_1}\right)^{2s-1}}.$$

Ainsi nous pouvons écrire pour $s \geqq \frac{3}{2}$,

$$(67)\quad \left\{\begin{aligned}\Phi(x) = {} & \frac{1}{2i\pi}\Phi_1(x) - \frac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)}\,\frac{\lambda^{(s)}(0,0)}{i\pi}(-1)^{s-\frac{1}{2}}\\ & \times\left[\frac{1+\dfrac{z_1^2}{\alpha\sin\psi(z_1^2-1)}\,\dfrac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}}\right]^{2s-1}\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{x_1}\right)^{2s-1}}\\ & \times\left[1+\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\times\text{fonction holomorphe de}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\right.\\ & \quad\left.+\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{2s-1}\log\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\times\text{fonction holomorphe de}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Nous rappelons que pour $s=\frac{3}{2}$ le facteur $\dfrac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)}$ doit être remplacé par 1.

Le facteur $\lambda^s(0,0)$ qui rentre dans les développements (66), (67) est susceptible de deux déterminations. On a en effet (49)

$$\lambda^{s}(0,0)=[\mathrm{H}(0,0)]^s\,\frac{1}{\alpha z_1}\,f_1\left[\frac{z_1}{\alpha\sin^2\dfrac{\psi}{2}\left(z_1-\cot\dfrac{\psi}{2}\right)^2}\right]f(z_1),$$

et le facteur $[\mathrm{H}(0,0)]^s$ a deux déterminations.

Il est aisé de faire un choix entre ces déterminations. On peut écrire

$$[H(o, o)]^s = \left[\sqrt{H(o, o)}\right]^{2s}.$$

$\sqrt{H(o, o)}$ ayant pour argument $\frac{\pi}{2}$ (¹), on déduit de là

$$[H(o, o)]^s = i(-1)^{s-\frac{1}{2}}[-H(o, o)]^s,$$

$[-H(o, o)]^s$ étant pris dans le sens arithmétique.

Il en résulte

$$\frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}}\lambda^{(s)}(o, o)}{i} = [-H(o, o)]^s \frac{1}{\alpha z_1} f_1\left[\frac{z_1}{\alpha \sin^2\frac{\psi}{2}\left(z_1 - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}\right] f(z_1).$$

En posant

$$B^s = \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}}\lambda^{(s)}_{0,0}}{i}\left[\frac{1 + \frac{z_1^2}{\alpha \sin\psi(z_1^2 - 1)}\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}}{\frac{1}{2}\frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}}\right]^{2s-1},$$

on a, d'après les formules (46) et (12),

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} B^{(s)} = {} & \frac{1}{a^{2s}}\frac{1}{z_1}\left[\frac{2z_1^2}{\sin\psi(z_1^2 - 1)}\right]^{2s-1}\left\{\left[\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}\right]^2 + \alpha\sin\psi\,\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}\,\frac{z_1^2 - 1}{z_1^2}\right\}^{s-1} \\ & \times f_1\left[\frac{z_1}{\alpha \sin^2\frac{\psi}{2}\left(z_1 - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}\right] f(z_1). \end{aligned}\right.$$

On en déduit : pour $s = \frac{1}{2}$,

$$(66)'\quad \left\{\begin{aligned} \Phi(x) = {} & \frac{1}{2i\pi}\Phi_1(x) + \frac{B^{(\frac{1}{2})}}{\pi}\log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \\ & \times\left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\times \text{fonction holomorphe de}\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\right]; \end{aligned}\right.$$

(¹) Se reporter au nº 29.

pour $s \geq \frac{3}{2}$,

$$(67)' \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) = & \frac{1}{2i\pi}\Phi_1(x) - \frac{B^{(s)}}{\pi}\frac{2.4\ldots\overline{2s-3}}{1.3\ldots\overline{2s-2}}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{2s-1}} \\ & \times\left[1+\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\times \text{fonction holomorphe de}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\right. \\ & \left. +\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{2s-1}\log\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\times\text{fonction holomorphe de}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

$\Phi_1(x)$ étant une fonction holomorphe dans le domaine de $x = x_1$.

X. — Calcul de I'.

52. I' est défini par l'intégrale (57)

$$\mathrm{I}' = \frac{1}{2i\pi}\int_S \Phi(x)\frac{dx}{x^{m_1+1}}.$$

Le contour d'intégration S (*fig.* 12) est une circonférence de rayon supérieur à $|x_1|$, déformée le long de la droite ox_1, de façon à laisser le point singulier x_1 de $\Phi(x)$ à l'extérieur du contour. Dès lors le point x_1 est de tous les points singuliers de $\Phi(x)$, extérieurs au contour S, le plus rapproché de l'origine. La considération de ce point singulier conduit donc à la valeur asymptotique de I' ([1]).

En partant des développements (66)', (67)', l'application de la méthode de M. Darboux donne : pour $s = \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{I}' = \frac{B^{(\frac{1}{2})}}{\pi}\times\left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \log\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\right]\left(1+\frac{K'}{m_1}\right);$$

pour $s = \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}' = & -\frac{B^{(s)}}{\pi}\frac{2.4\ldots\overline{2s-3}}{1.3\ldots\overline{2s-2}} \\ & \times\left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans} \left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{1-2s}\right]\left(1+\frac{K''}{m_1}\right); \end{aligned}$$

K' et K'' restant finis lorsque m_1 augmente indéfiniment.

([1]) Se reporter au n° 1 (généralisation du théorème I).

Le coefficient de x^{m_1} dans $\log\left(1-\frac{x}{x_1}\right)$ est

$$-\frac{1}{m_1}\frac{1}{x_1^{m_1}},$$

et dans $\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{1-2s}$,

$$\frac{1}{m^{2(1-s)}}\frac{1}{x_1^{m_1}}\frac{1}{\Gamma(2s-1)}\left(1+\frac{K''}{m_1}\right) \text{ [1]}.$$

On peut donc écrire, en remplaçant (39) x_1 par $\frac{1}{\varphi(z_1)}$,

$$(69) \qquad I' = -\frac{B^{s_1}}{\pi[1.3\ldots 2s-2]^2}\frac{1}{m_1^{2(1-s)}}\varphi^{m_1}(z_1)\left(1+\frac{K}{m_1}\right),$$

K restant fini lorsque m_1 augmente indéfiniment. Cette expression convient au cas où $s=\frac{1}{2}$.

53. La valeur de I', que nous venons d'obtenir, correspond au cas où le contour C' est voisin du point $z=z_1$ [2].

Le cas où le contour C' est voisin du point $z=z_2$ [2] donne lieu à des raisonnements identiques à ceux qui ont été exposés dans les Chapitres VII, VIII, IX. Les extrémités β, γ du contour C' (*fig.* 8) sont, dans ce cas, plus rapprochées de l'origine que le point z_2; d'autre part les inégalités (52)' remplacent les inégalités (52). Il n'en résulte pas de modifications essentielles.

En définitive, la valeur de I', lorsque le contour C' est voisin du point $z=z_2$, s'obtient en remplaçant z_1 par z_2 dans les formules (69) et (68).

XI. — Conclusions.

54. Il est facile maintenant de conclure la valeur de I dans les cas énumérés au n° **20**.

I' et I'' sont en effet de la forme

$$I' = m_1^{q'}\,G'(\xi')\,\varphi^{m_1}(\xi'),$$
$$I'' = m_1^{q''}\,G''(\xi'')\,\varphi^{m_1}(\xi''),$$

(1) Se reporter au n° 2.

(2) Se reporter au n° 20.

les fonctions G′ et G″ restant finies lorsque m_1 croît indéfiniment; q' et q'' étant des nombres fixes; ξ' représentant, suivant les cas, z_1 ou z_2; ξ'' représentant, suivant les cas, ξ, Z ou Z_i.

Cela étant, supposons

1° $|\varphi(\xi')| > |\varphi(\xi'')|$. On a

$$I = I' + I'' = m_1^{q'} \left\{ G'(\xi') + m_1^{q''-q'} G''(\xi'') \left[\frac{\varphi(\xi'')}{\varphi(\xi')} \right]^{m_1} \right\} \varphi^{m_1}(\xi').$$

Lorsque m_1 croît indéfiniment, le produit $m_1^{q''-q'} \left[\frac{\varphi(\xi'')}{\varphi(\xi')} \right]^{m_1}$ tend vers zéro même si $q'' > q'$. On a donc asymptotiquement $I = I'$.

2° $|\varphi(\xi'')| > |\varphi(\xi')|$. On a asymptotiquement $I = I''$, pour le même motif.

Résumé.

53. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de résumer tout ce qui est essentiel pour déterminer pratiquement la valeur de I.

Nous commencerons par rappeler l'énoncé du problème.

On considère deux planètes P, P_1 *se mouvant dans le même plan.* P *décrit une orbite elliptique* (u, *anomalie excentrique*; r, *rayon vecteur*; $e = \sin\psi$, *excentricité*; a, *demi grand axe*; ζ *anomalie moyenne*); P_1 *décrit une orbite circulaire qui enveloppe l'orbite de* P (a_1, *rayon vecteur et demi grand axe*; ζ_1, *anomalie*).

On se propose, m *et* m_1 *désignant deux entiers très grands* ($m_1 > 0$), *de trouver la valeur asymptotique des coefficients de* $\frac{\cos}{\sin}(m\zeta + m_1\zeta_1)$ *dans le développement de*

$$\frac{f(E^{iu})\, f_1(E^{i\zeta_1})}{\Delta^s}$$

[E, *base des logarithmes népériens*; $i = \sqrt{-1}$; $f(E^{iu})$, *fonction entière réelle de* $\sin u$ *et de* $\cos u$; $f_1(E^{i\zeta_1})$, *fonction entière réelle de* $\sin\zeta_1$ *et* $\cos\zeta_1$; Δ, *carré de la distance* PP_1; $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$].

Le coefficient de $\cos(m\zeta + m_1\zeta_1)$ a pour valeur la partie réelle, et le coefficient de $\sin(m\zeta + m_1\zeta_1)$ est égal au multiplicateur de $-\sqrt{-1}$, dans une certaine imaginaire I, qui se calcule comme on va l'indiquer.

Il est aisé de prévoir que ce dernier coefficient est nul, lorsque la fonction à développer provient d'un premier développement de la fonction perturbatrice ordinaire effectué par rapport à l'inclinaison.

Il convient, pour simplifier l'exposition, d'introduire quelques notations.

56. Posons

$$\frac{m}{m_1} = \theta;$$

$$\theta' = \frac{1}{8}\,\text{séc}^3\frac{\psi}{3}, \qquad \theta'' = -\frac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ - \frac{\psi}{3}\right), \qquad \theta''' = -\frac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ + \frac{\psi}{3}\right) \;(^1);$$

$$\alpha = \frac{a}{a_1} < 1;$$

$$r = -\frac{a\sin\psi}{2z}\left(z - \text{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right);$$

$$\varphi^{m_1}(z) = \left[\frac{\alpha\sin^2\frac{\psi}{2}}{z}\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2\right]^{m_1}\left[z\,\text{E}^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\right]^{-m}.$$

Faisons

$$\text{H}(z) = \frac{1}{2z}\frac{r}{a}f_1\left[\frac{z}{\alpha\sin^2\frac{\psi}{2}\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}\right]f(z)\frac{(a_1^2 - r^2)^{-s}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}\,m_1^{s-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)}}\,\varphi^{m_1}(z) \;(^2).$$

Pour les valeurs qui seront substituées à z, dans $\text{H}(z)$, l'argument du facteur $(a_1^2 - r^2)^{-s}$ s'obtient en multipliant par $-s$ l'argument de $a_1^2 - r^2$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

La détermination de $\sqrt{\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ s'obtient d'après la règle suivante : si l'argument ω de z est compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$, la partie réelle du radical est positive; si $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{3\pi}{4}$, la partie imaginaire du radical est

---

(1) On trouvera plus loin une Table donnant θ', θ'', θ''' en fonction de l'excentricité $e = \sin\psi$.

(2) L'expression entre crochets, écrite après f_1, n'est pas un facteur; c'est ce que l'on doit substituer à $\text{E}^{i\zeta_1}$ dans la fonction $f_1(\text{E}^{i\zeta_1})$.

positive; si $\frac{3\pi}{4} < \omega < \frac{5\pi}{4}$, la partie réelle du radical est négative; si $\frac{5\pi}{4} < \omega < \frac{7\pi}{4}$, la partie imaginaire du radical est négative.

Les valeurs Z, Z_i ou Z_{-i} qui seront substituées à z dans $H(z)$ annulent l'expression

$$\theta \sin\psi\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2 + 2z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right);$$

aussi doit-on faire dans $H(z)$

$$2\frac{\varphi(z)}{\varphi''(z)} = \frac{4z^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)}{\theta\sin\psi\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)\left[2\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right) + z - \cot\frac{\psi}{2}\right] + 4z + 2\cot\frac{\psi}{2}}.$$

Valeurs de Z, Z_i, Z_{-i}. — Si $\theta < \theta'''$ ou si $\theta'' < \theta < \theta'$, on aura à substituer à z, dans $H(z)$, la valeur réelle

$$Z = \cot\frac{\psi}{2}\,\frac{v+1}{v-1},$$

en posant

$$\cos\chi = -\theta\left(\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}, \qquad 0 < \chi < 180^\circ;$$

$$v = -2\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}}\cos\left(60^\circ + \frac{\chi}{3}\right).$$

Z est positif lorsque $\theta < \theta'''$, négatif lorsque $\theta'' < \theta < \theta'$.

Si $\theta''' < \theta < \theta''$ ou si $\theta' < \theta < \frac{1}{2\cos\psi}$, on aura à substituer à z, dans $H(z)$, les valeurs

$$Z_i = \cot\frac{\psi}{2}\,\frac{v+1}{v-1}, \qquad Z_{-i} = \text{l'imaginaire conjuguée de } Z_i,$$

en posant

$$\sin 2\chi = -\frac{1}{\theta}\left(\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad \operatorname{tang}\xi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\chi},$$

$$v = -\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}}\,\frac{1}{\sin 2\xi} + \sqrt{-1}\sqrt{1-2\theta\cos\psi}\cot 2\xi$$

Si $\theta > \frac{1}{2\cos\psi}$, on aura à substituer à z, dans $H(z)$, les valeurs

$$Z_i = \cot\frac{\psi}{2}\,\frac{v+1}{v-1}, \qquad Z_{-i} = \text{l'imaginaire conjuguée de } Z_i,$$

en posant

$$\cot 2\chi = \theta\left(\frac{2\theta\cos\psi - 1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}, \qquad \operatorname{tang}\xi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\chi},$$

$$v = \sqrt{\frac{2\theta\cos\psi - 1}{3}}\cot 2\xi + \sqrt{-1}\sqrt{2\theta\cos\psi - 1}\,\frac{1}{\sin 2\xi}.$$

Il convient de rappeler, pour achever de dire ce qui se rapporte à la fonction $H(z)$, que

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}, \qquad \ldots$$

57. Nous aurons aussi à considérer la fonction

$$\Xi(z) = -\frac{1}{z a^{2s}}\left[\frac{2z^2}{\sin\psi(z^2 - 1)}\right]^{2s-1}\left\{\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]^2 + \alpha\sin\psi\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,\frac{z^2 - 1}{z^2}\right\}^{s-1}$$

$$\times f_1\left[\frac{z}{\alpha\sin^2\frac{\psi}{2}\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}\right] f(z)\,\frac{m_1^{2s-1}\,\varphi^{m_1}(z)}{\pi(1.3\ldots 2s-2)^2} \quad (^1).$$

Les valeurs de z que l'on aura à substituer dans cette fonction sont

$$z_1 = -\frac{1 - \alpha + \sqrt{(1-\alpha)^2 - \alpha^2\sin^2\psi}}{\alpha\sin\psi}, \qquad z_2 = \frac{1}{z_1}.$$

Pour ces valeurs de z le facteur élevé à la puissance $s - 1$ dans $\Xi(z)$ a une valeur réelle et positive.

L'expression de $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est la suivante

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\theta\sin\psi\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2 + 2z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right)}{2z^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)}.$$

58. Ces définitions données, voici les valeurs de I, dans tous les cas possibles, en appelant ε une quantité de la forme $\frac{K}{m_1}$, K restant fini lorsque m_1 augmente indéfiniment.

---

(1) L'expression entre crochets, écrite après f_1, n'est pas un facteur; c'est ce que l'on doit substituer à E^{ζ_1} dans la fonction $f_1(E^{\zeta_1})$.

TABLEAU I.

$\theta < \theta'''$

1° Si $Z > |z_2|$, on a

$$I = H(Z)(1+\varepsilon);$$

2° Si $Z < |z_2|$ et si $|\varphi(Z)| > |\varphi(z_2)|$, on a

$$I = H(Z)(1+\varepsilon);$$

3° Si $Z < |z_2|$ et si $|\varphi(Z)| < |\varphi(z_2)|$, on a

$$I = \Xi(z_2)(1+\varepsilon).$$

$\theta''' < \theta < \theta''$

4° Si $|Z_i| > |z_2|$, on a

$$I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1+\varepsilon);$$

5° Si $|Z_i| < |z_2|$ et si $|\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_2)|$, on a

$$I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1+\varepsilon);$$

6° Si $|Z_i| < |z_2|$ et si $|\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_2)|$, on a

$$I = \Xi(z_2)(1+\varepsilon).$$

$\theta'' < \theta < \theta'$

7° Si $|z_2| < |Z| < |z_1|$, on a

$$I = H(Z)(1+\varepsilon);$$

8° Si $|Z| > |z_1|$, on a

$$I = \Xi(z_1)(1+\varepsilon);$$

9° Si $|Z| < |z_2|$, on a

$$I = \Xi(z_2)(1+\varepsilon).$$

$\theta > \theta'$

10° Si $|Z_i| < |z_1|$, on a

$$I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1+\varepsilon);$$

11° Si $|Z_i| > |z_1|$ et si $|\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_1)|$, on a

$$I = [H(Z_i) + H(Z_{-i})](1+\varepsilon);$$

12° Si $|Z_i| > |z_1|$ et si $|\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_1)|$, on a

$$I = \Xi(z_1)(1+\varepsilon) \text{ (1)}.$$

Lorsque $\theta < 0$ et $\alpha < \frac{1}{2}$, on tombera toujours, suivant la valeur de θ, dans l'un des cas 1°, 4°, 7°.

---

(1) Ces expressions sont tirées des formules (37), (37)', d'une part, et, d'autre part, des formules (38)'', (38)''', (69), en observant ce qui a été dit au n° 34.

Lorsque $\theta > 0$ et $\alpha > \frac{1}{2}$, on tombera toujours dans l'un des cas 8°, 11° ou 12°.

TABLEAU II.

Table donnant la valeur de $\frac{1}{2\cos\psi}$, θ', θ'', θ'''.

(Argument $e = \sin\psi$).

e.	$\frac{1}{2\cos\psi}$.	θ'.	θ''.	θ'''.	e.	$\frac{1}{2\cos\psi}$.	θ'.	θ''.	θ'''.
0,00	0,500	0,125	−1,000	−1,000	0,21	0,511	0,126	−0,713	−1,490
0,01	0,500	0,125	−0,983	−1,018	0,22	0,513	0,126	−0,702	−1,522
0,02	0,500	0,125	−0,966	−1,035	0,23	0,514	0,126	−0,691	−1,555
0,03	0,500	0,125	−0,950	−1,054	0,24	0,515	0,126	−0,681	−1,589
0,04	0,500	0,125	−0,934	−1,073	0,25	0,516	0,126	−0,671	−1,624
0,05	0,501	0,125	−0,919	−1,092	0,26	0,518	0,126	−0,661	−1,661
0,06	0,501	0,125	−0,903	−1,112	0,27	0,519	0,127	−0,652	−1,698
0,07	0,501	0,125	−0,889	−1,133	0,28	0,521	0,127	−0,642	−1,737
0,08	0,502	0,125	−0,874	−1,153	0,29	0,522	0,127	−0,633	−1,777
0,09	0,502	0,125	−0,860	−1,176	0,30	0,524	0,127	−0,624	−1,819
0,10	0,503	0,125	−0,846	−1,198	0,31	0,526	0,127	−0,615	−1,862
0,11	0,503	0,125	−0,833	−1,221	0,32	0,528	0,127	−0,606	−1,907
0,12	0,504	0,125	−0,819	−1,244	0,33	0,530	0,127	−0,597	−1,953
0,13	0,504	0,125	−0,806	−1,269	0,34	0,532	0,128	−0,588	−2,002
0,14	0,505	0,125	−0,794	−1,293	0,35	0,534	0,128	−0,580	−2,052
0,15	0,506	0,125	−0,782	−1,319	0,36	0,536	0,128	−0,572	−2,104
0,16	0,507	0,126	−0,769	−1,346	0,37	0,538	0,128	−0,564	−2,159
0,17	0,507	0,126	−0,757	−1,373	0,38	0,540	0,128	−0,556	−2,215
0,18	0,508	0,126	−0,746	−1,401	0,39	0,543	0,128	−0,548	−2,274
0,19	0,509	0,126	−0,735	−1,430	0,40	0,545	0,129	−0,541	−2,335
0,20	0,510	0,126	−0,724	−1,460					

APPLICATIONS.

Nos formules permettent de tenir compte, dans le calcul d'une inégalité d'ordre élevé, de l'excentricité de la planète intérieure et de l'inclinaison des orbites; elles fournissent, avec une faible erreur relative, la partie du coefficient de l'inégalité qui est indépendante de l'excentricité de la planète extérieure. Cette partie, il est vrai, peut différer du coefficient exact, parce que les termes qui contiennent en facteur l'excentricité négligée sont multipliés par de grands fac-

teurs [1]; mais, si elle est notable, il y a des chances pour que l'inégalité complète ait elle-même une valeur sensible, et il y aura lieu de la déterminer par les méthodes ordinaires.

1° *Application à Mercure.* — Proposons-nous de trouver le coefficient de l'inégalité de la longitude moyenne de Mercure, dont l'argument dépend de huit fois le moyen mouvement de Vénus moins cinq fois celui de Mercure.

Cette inégalité se trouve dans les Tables de Le Verrier (*Annales de l'Observatoire*, t. V) qui a tenu compte seulement de l'excentricité de Mercure. D'après Le Verrier, le coefficient de la fonction perturbatrice, multiplié par le demi grand axe de Vénus, a pour valeur $-(\bar{1},815)e^3$, celui de l'inégalité $-0'',007$ ou, plus exactement, $-0'',0067$ (p. 189, colonnes $a'R_1$ et A_1).

Nous avons fait le calcul de nos expressions approchées, en tenant compte seulement de l'excentricité de Mercure, comme Le Verrier, c'est-à-dire en y faisant

$$f = f_1 = 1, \qquad s = \tfrac{1}{2}.$$

Dans le cas actuel il faut prendre

$$m = -5, \qquad m_1 = 8, \qquad \theta = -0,625, \qquad e = \sin\psi = 0,205618.$$

D'après le Tableau II, θ est compris entre θ' et θ'' pour $e = 0,205\ldots$. Il faut donc choisir, dans le Tableau I, entre les cas 7°, 8° et 9° et à cet effet calculer Z, z_1 et $z_2 = \frac{1}{z_1}$.

En prenant

$$a = \text{distance moyenne de Mercure} = 0,3870987,$$
$$a_1 = \quad \text{»} \quad \text{Vénus} = 0,7233322,$$

on trouve

$$Z = -(0,12104), \qquad z_1 = -(0,92059);$$

---

[1] *Voir* à ce sujet une Note de M. Callandreau (*Comptes rendus* du 5 septembre 1892).

les nombres étant représentés par leurs logarithmes écrits entre parenthèses. On a $|z_2| < |Z| < |z_1|$; on tombe par suite dans le cas 7°.

On trouve successivement, en faisant $z = Z$ dans les formules du n° **36**,

$$\frac{r}{a_1} = (\bar{1},81255),$$

$$(a_1^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} = (0,25962),$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{m_1}} = (\bar{1},05130),$$

$$\sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varphi''}} = -(0,57379),$$

$$\varphi^{m_1} = -(\bar{2},44773).$$

$\sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varphi''}}$ est affecté du signe $-$, parce que Z est réel et négatif et a, par suite, π pour argument. On trouve ensuite

$$\mathrm{I} = -(\bar{3},9944).$$

Tel est le coefficient de $\cos(8l' - 5l)$ dans le développement de la fonction perturbatrice. Le coefficient de $\sin(8l' - 5l)$ est nul puisque I n'a pas de partie imaginaire, ce à quoi on pouvait s'attendre en s'appuyant sur la forme de l'argument dans le développement ordinaire de la fonction perturbatrice.

L'inégalité correspondante $\delta\rho$ a pour valeur, en appelant μ_1 la masse de la planète perturbatrice qui est ici Vénus ($\log\mu_1 = \bar{6},39594$), n le moyen mouvement de la planète troublée (Mercure), n_1 le moyen mouvement de la planète perturbatrice (Vénus),

$$\delta\rho = -\frac{3a\mu_1 m}{\sin 1''}\frac{1}{\left(m + m_1\frac{n_1}{n}\right)^2}\sin(ml + m_1 l_1)\ (^1),$$

en prenant pour origine des longitudes l'un des nœuds des orbites.

Tout calcul fait on trouve

$$\delta\rho = -0'',0084\sin(-5l + 8l_1).$$

(1) *Voir* Tisserand, *loc. cit.*, Chap. XI.

En comparant le coefficient de $\delta\rho$ à celui de Le Verrier, on voit que l'erreur relative du résultat est $\frac{1}{5} = \frac{1}{m}\cdot$ L'approximation est satisfaisante, bien que, dans le cas actuel, le nombre m ne soit pas très élevé.

2° *Seconde application à Mercure.* — En développant en fraction continue le rapport $\frac{n}{n_1}$, on trouve la réduite $\frac{23}{9}\cdot$

Proposons-nous de chercher l'ordre de grandeur du coefficient de l'inégalité de la longitude moyenne de Mercure dont l'argument dépend de vingt-trois fois le moyen mouvement de Vénus, moins neuf fois celui de Mercure.

Cette inégalité a été considérée par M. Newcomb dans son étude sur les passages de Mercure (*Astronomical Papers*, t. I).

Nous négligerons l'excentricité de Vénus et l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur celle de Vénus qui, en raison de leur petitesse, n'apportent vraisemblablement pas un fort appoint à la partie du coefficient qui dépend de la grande excentricité de Mercure.

Le calcul se conduit comme pour l'inégalité d'argument $8l_1 - 5l$, en partant des mêmes données. On rentre encore dans le cas 7° du Tableau I.

On trouve

$$I = (\bar{8},7230)$$

et

$$\delta\rho = 0'',015 \sin(23l_1 - 9l).$$

L'inégalité est donc extrêmement faible.

3° *Application à Jupiter et à Junon.* — La théorie de Junon a été entreprise par Damoiseau (*Connaissance des Temps*, 1846) en tenant compte de l'action de Jupiter et de Saturne et en se limitant, dans les approximations, aux quantités du 5e ordre.

Nous avons reconnu qu'il faudrait calculer, dans une théorie précise de Junon, une inégalité du 12e ordre, affectant la longitude moyenne de cette planète, et provenant des perturbations de son moyen mouvement causées par Jupiter. L'argument de cette inégalité est $19l_1 - 7l$ (l_1 longitude moyenne de Jupiter, l longitude moyenne de Junon, comptées à partir de l'un des nœuds des orbites).

Les éléments de calcul empruntés à l'*Annuaire du Bureau des*

Longitudes sont les suivants :

Pour Jupiter.	Pour Junon.
$n_1 = 299'',1284$	$n = 814'',0766$
$a_1 = 5,202800$	$a = 2,668256$
$\text{Masse} = \mu_1 = \dfrac{1}{1047,2}$	$e = 0,257857$

On a d'ailleurs

$$m = -7, \qquad m_1 = 19, \qquad \theta = -\frac{7}{19} = -0,368\ldots.$$

On reconnaît que l'on tombe encore dans le cas 7° du Tableau I.

En conduisant le calcul comme précédemment et tenant compte seulement de l'excentricité de Junon, on trouve

$$\mathrm{I} = (\bar{7},5240)$$

et

$$\delta\rho = 10'',7 \sin(19\, l_1 - 7\, l).$$

La période de l'inégalité est de 235 ans.

Le coefficient serait vraisemblablement modifié si l'on ne négligeait pas l'inclinaison des orbites et surtout l'excentricité de Jupiter qui est notable.

ADDITION AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Les racines de l'équation $\mathrm{U}(z) = 0$ (17) sont données (18), (19) par

(70) $$z = \cot\frac{\psi}{2}\,\frac{v+1}{v-1},$$

v étant définie par l'équation

(71) $$v^3 - (1 + 2\theta\cos\psi)v + 2\theta = 0.$$

Nous nous proposons de déterminer la valeur de Z, c'est-à-dire, lorsque l'équation $U = 0$ a toutes ses racines réelles, la plus petite racine de cette équation si $\theta < 0$, ou la racine moyenne si $\theta > 0$.

$$(72)\quad \begin{cases} \text{Lorsque } v \text{ croît de } -\infty \text{ à } -1, & z \text{ décroît de } \cot\frac{\psi}{2} \text{ à } \quad 0, \\ \qquad\text{id.} \qquad -1 \text{ à } +1, & \quad\text{id.} \qquad 0 \text{ à } -\infty, \\ \qquad\text{id.} \qquad +1 \text{ à } +\infty, & \quad\text{id.} \qquad +\infty \text{ à } \cot\frac{\psi}{2}. \end{cases}$$

Supposons d'abord $\theta < 0$.

L'équation (71), dont nous supposons les racines réelles, est vérifiée par

$$(73)\quad \begin{cases} v_1 = 2\sqrt{\dfrac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}}\cos\dfrac{\chi}{3}, \\ v_2 = -2\sqrt{\dfrac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}}\cos\left(60^\circ - \dfrac{\chi}{3}\right), \\ v_3 = -2\sqrt{\dfrac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}}\cos\left(60^\circ + \dfrac{\chi}{3}\right); \end{cases}$$

en posant

$$(74)\qquad \cos\chi = -\theta\left(\frac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}, \qquad 0 < \chi < 90^\circ.$$

Les inégalités $0 < \frac{\chi}{3} < 30^\circ$ entraînent les suivantes

$$v_1 > 0 > v_3 > v_2.$$

1° $\theta < \theta'''$. $U(z) = 0$ a ses trois racines positives : la plus grande est supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$ et la racine Z que nous nous proposons de calculer est la plus petite.

Le Tableau (72) montre que la racine plus grande que $\cot\frac{\psi}{2}$ ne peut être donnée que par v_1, et que v_2 et v_3 sont forcément compris entre -1 et $-\infty$, sans quoi ces paramètres ne fourniraient pas pour z des valeurs positives. La plus petite valeur de z correspond d'ailleurs à v_3, qui est inférieur à v_2 en valeur absolue.

Il faut donc, pour avoir Z, substituer dans la formule (70) le nombre v_3.

2° $\theta > \theta > \theta''$. $U(z) = 0$ a deux racines négatives et une racine positive supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$. La racine Z que nous nous proposons de calculer est la plus petite.

La racine supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$ ne peut être donnée que par c_1. c_2 et c_3 devant donner des valeurs négatives pour z, ces paramètres sont compris (72) entre 0 et -1. La plus petite valeur de z correspond à c_3 qui est inférieur en valeur absolue à c_2.

Il faut donc pour avoir Z substituer c_3 dans l'équation (70).

Supposons, en second lieu, $\theta' > \theta > 0$.

L'équation $U(z) = 0$ a deux racines négatives et une racine positive comprise entre 0 et $\tan\frac{\psi}{2}$.

La racine Z que nous nous proposons de calculer est la racine moyenne.

Les racines de l'équation (71) sont encore (73) c_1, c_2, c_3, en posant

$$\cos\chi = -\theta\left(\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}, \qquad 90^\circ < \chi < 180^\circ.$$

Les inégalités

$$30^\circ < \frac{\chi}{3} < 60^\circ$$

entraînent les suivantes

$$c_1 > c_3 > 0 > c_2.$$

La racine positive de $U(z)$, qui est inférieure à $\tan\frac{\psi}{2}$, ne peut être donnée par c_2 qui est négatif (72).

c_1 et c_3 devant donner à z des valeurs négatives, on a (72)

$$1 > c_1 > c_3 > 0.$$

La racine négative de $U(z)$, la plus voisine de zéro, est donc donnée par c_3.

Il faut donc encore, pour avoir Z, substituer le nombre c_3 dans l'équation (70).

Ainsi se trouvent établies les formules (23), (24), (25) données dans ce Mémoire sans démonstration.

Sur la surface de Kummer;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

Des fautes d'impression (suppressions d'accents) ont complètement défiguré l'énoncé d'une proposition que j'ai publiée au tome IX (4ᵉ série, p. 58) de ce Journal, relativement à la surface de Kummer. Voici comment le théorème doit être rétabli.

Soient 1, 2, 3, 4 *et* 1', 2', 3', 4' *deux séries de quatre caractères; désignons par* α *un caractère quelconque de la première série, par* β, γ, δ *les trois autres, par* α' *un caractère de la seconde, par* β', γ', δ' *les trois autres.*

Les seize symboles $\alpha\alpha'$ *représenteront les seize plans singuliers, et les seize symboles* $(\alpha\alpha')$ *les seize points singuliers de la surface de Kummer, de telle façon :*

1° *Que les six points singuliers contenus dans le plan* $\alpha\alpha'$ *soient*

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\alpha'),\quad (\gamma\alpha'),\quad (\delta\alpha');$$

2° *Que les six plans singuliers passant par le point* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta',\quad \alpha\gamma',\quad \alpha\delta',\quad \beta\alpha',\quad \gamma\alpha',\quad \delta\alpha'.$$

Cet algorithme peut être étendu aux fonctions thêta abéliennes, du premier ordre, de genre quelconque; nous ne l'énoncerons que pour le genre trois, mais la généralisation est évidente.

Soient 1, 2, 3, 4; 1′, 2′, 3′, 4′; *et* 1″, 2″, 3″, 4″ *trois séries de quatre caractères; les soixante-quatre symboles tels que* 1 1′ 1″ *représenteront les soixante-quatre fonctions thêta normales du premier ordre, de genre trois, et les soixante-quatre symboles tels que* (1 1′ 1″) *représenteront les soixante-quatre demi-périodes de ces fonctions de telle sorte :*

1° *Que les vingt-huit demi-périodes annulant une fonction thêta, telle que* 1 1′ 1″, *soient représentées par les symboles de la forme* $(\alpha\alpha'\alpha'')$ *où les chiffres* 1, 1′, 1″ *figurent, au total, un nombre impair de fois;*

2° *Que les vingt-huit fonctions qui s'annulent pour une demi-période, telle que* (1 1′ 1″), *soient également représentées par les symboles* $\alpha\alpha'\alpha''$, *dans lesquels les chiffres* 1, 1′, 1″ *figurent, au total, un nombre impair de fois.*

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME X.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

		Pages.
[R8g]	Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique; par M. *Paul Painlevé*	5
[S2e]	Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un solide (suite et fin); par M. *H. Willotte*	93
[H1c]	Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires; par M. *Ernest Lindelöf*	117
[B4g]	Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences); par M. *R. Perrin*	129
[M¹2g]	Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques; par M. *Georges Humbert*	169
[M²8e]	Note au sujet du Mémoire précédent; par M. *Paul Painlevé*	203
[S4a]	Commentaire aux principes de la Thermodynamique (Troisième Partie); par M. *P. Duhem*	207
[R8g]	Note au sujet d'un Mémoire de M. *Painlevé* sur les équations de la Dynamique; par M. *R. Liouville*	287
[D2f]	Sur la généralisation des fractions continues algébriques; par M. *H. Padé*	291

Pages.

[O5e] Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques; par M. *L. Raffy*.......... 331

[U4] Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé; par M. *Maurice Hamy*.......... 391

[M¹2g] [M²8e] Sur la surface de Kummer; par M. *Georges Humbert*....... 473

FIN DU TOME X DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

20634 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QUATRIÈME SÉRIE.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

PUBLIÉ PAR

M. C. JORDAN,
Membre de l'Institut

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES DIX VOLUMES COMPOSANT LA 4e SÉRIE DE CE JOURNAL,

SUIVIE

D'UNE TABLE PAR NOMS D'AUTEURS

(ANNÉES 1885 A 1894)

ET D'UNE TABLE GÉNÉRALE DES NOMS D'AUTEURS DES VOLUMES DES QUATRE SÉRIES

(ANNÉES 1836 A 1894).

TOME Ier. (ANNÉE 1885.)

Pages.

AVERTISSEMENT 7

Sur les fonctions holomorphes; par M. *Hermite* 9

Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires; par M. *G.-H. Halphen* 11

Sur les fonctions hyperabéliennes; par M. *Émile Picard* 87

Sur une application des équations de Lagrange; par M. *A. de Saint-Germain* 129

Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels; par M. *E. Laguerre* 135

Sur les courbes définies par les équations différentielles; par M. *H. Poincaré* 167

Sur l'inversion des intégrales abéliennes; par M. *P. Appell* 245

Sur les intégrales des différentielles totales algébriques de première espèce; par M. *Émile Picard* 281

Application géométrique d'un théorème de Jacobi; par M. *G. Humbert* 347

Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires : hypothèses qui déterminent ces fonctions; par M. *Paul Le Cordier* 357

Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe; par M. *G. Darboux* 403

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. *Premier Mémoire :* Généralités et groupes quadratiques; par M. *Léon Autonne* 431

Sur les équations du cinquième degré; par M. *Paul Gordan* 455

TOME II. (Année 1886.)

	Pages.
Mémoire d'optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques; par M. *A. Mannheim*	5
Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. *Deuxième Mémoire:* Groupes cubiques; par M. *Léon Autonne*	49
Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites *arbitraires* d'une variable réelle; par M. *K. Weierstrass*. Traduit par M. *Léonce Laugel*.. 105 et	115
Sur le coefficient du terme général dans certains développements; par M. *L.-H. Anglin*	139
Sur les courbes définies par les équations différentielles (quatrième Partie); par M. *H. Poincaré*	151
Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite); par M. *Lipschitz*	219
Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques; par M. *G. Humbert*	239
Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce; par M. *Émile Picard*.	329
Recherches sur la transformation par des substitutions réelles d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même; par M. *Lipschitz*. (Traduit par M. *J. Molk*).	373
Sur une loi de Fresnel; par M. *E. Jablonski*.	441

TOME III. (Année 1887.)

Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$; par M. *Appell*..	5
Application de la dérivation d'Arbogast. — Formule générale pour le changement de la variable indépendante; par M. *David*..	53
Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact; par M. *Léon Autonne*.	63
Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce, par M. *Martin Krause*	87
Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques; par M. *Sylow*	109
Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation Kummer; par M. *E. Goursat*.	255
Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues; par M. *Gaston Darboux*	305
Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques; par M. *G. Humbert*	327
Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique; par M. *H. Poincaré*	405
Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement; par M. *H. Léauté*	465
Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie); par M. *Hugoniot*	477

TOME IV. (Année 1888.)

Sur le mouvement d'un solide dans un liquide; par M. *G.-H. Halphen*	5
Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la théorie des nombres; par le P. *Pépin*.	83
Sur les courbes cycliques de direction; par M. *G. Humbert*	129
Sur les courbes algébriques planes rectifiables; par M. *G. Humbert*	133
Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde Partie); par M. *H. Hugoniot*	153
Sur la résolution, par les *fonctions* hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique; par M. *F. Klein* (de Gœttingue). Extrait d'une lettre adressée à M. *C. Jordan*	169
Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. *Premier Mémoire:* Étude d'une substitution crémonienne isolée; par M. *Léon Autonne*	177
Lettre adressée à M. *Hermite;* par M. *David Hilbert*	249
Sur les équations les plus générales de la	

Pages.
double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel; par M. *Maurice Lévy* 257
Sur quelques propriétés des aires sphériques; par M. *G. Humbert* 313
Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même; par M. *Camille Jordan* 349
Sur un théorème d'Électrodynamique; par M. *P. Duhem* 369
Recherches sur les groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini. *Second Mémoire:* Multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques: groupe directeur; par M. *Léon Autonne* 407
Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires; par M. *G. Gilbert* 465

TOME V. (Année 1889.)

Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$; par M. *G.-H. Halphen* 5
Sur un théorème d'Électrodynamique. Note rectificative; par M. *P. Duhem* 53
Sur le développement de l'expression

$$R^2 - 2Rr[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2;$$

par M. *T.-J. Stieltjes* 55
Sur le développement des fonctions implicites; par M. *F. Gomes Teixeira* 67
Extrait d'une lettre à M. Hermite; par M. *F. Caspari* 73
Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie; par M. *G. Humbert* 81
Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. *Émile Picard* 135
Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque; par M. *G. Kœnigs* 321
Georges Halphen; par M. *Camille Jordan*. 345
Liste des travaux mathématiques de *Georges Halphen* 352
Sur les invariants de quelques équations différentielles; par M. *P. Appell* 360
Sur le développement de log Γ (*a*); par M. *T.-J. Stieltjes* 425

TOME VI. (Année 1890.)

Sur quelques formes quadratiques quaternaires; par le P. *Pépin*, S. J. 5
Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes; par M. *Hamy* 69
Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives; par M. *Émile Picard* 145
Sur les formes différentielles associées; par M. *G. Halphen* 211
Rectification au sujet du Mémoire sur les équations aux dérivées partielles; par M. *Émile Picard* 231
Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie (*suite et fin*); par M. *G. Humbert* 233
Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel; par M. *J. Dolbnia* 293
Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes; par M. *Poincaré* 313
Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite desdites relations; par M. *Ferdinand Caspary* .. 367
Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur; par M. *August Gutzmer* 405
Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre; par M. *G. Humbert* 423

TOME VII. (Année 1891.)

Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes; par M. *Albert Ribaucour* ... 5 et 219
Lois des chocs moléculaires; par M. *Cellerier*. 109
Sur les fonctions périodiques de deux variables; par M. *P. Appell* 157
Sur quelques effets des tremblements de terre; par M. *Cellerier* 271
Sur la surface desmique du quatrième ordre; par M. *G. Humbert* 353
Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide; par M. *H. Willotte* 399

TOME VIII. (Année 1892.)

Pages.

Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées; par M. *Émile Picard* 5

Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff; par M. *H. Poincaré* 15

Remarques sur les intégrales définies; par M. *Camille Jordan* 69

Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor; par M. *J. Hadamard* 101

Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la Théorie de la chaleur; par M. *Paul Appell* 187

Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe; par M. *Émile Picard* 217

Sur les invariants de quelques équations différentielles; par M. *P. Rivereau* 233

Commentaire aux principes de la Thermodynamique; par M. *P. Duhem* 269

Théorie des permutations et des arrangements *circulaires* complets; par M. *E. Jablonski* 331

Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles; par M. *Lucien Lévy* 351

Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. *Gustaf Kobb* 385

Recherches sur la convergence des intégrales définies; par M. *C.-J. de la Vallée-Poussin* 421

TOME IX. (Année 1893.)

Étude sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide (*suite*); par M. *H. Willotte* 5

Théorie générale des surfaces hyperelliptiques; par M. *G. Humbert* .... 29 et 361

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann; par M. *J. Hadamard* 171

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires; par M. *Émile Picard* 217

De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée; par M. *Émile Picard* 273

Commentaire aux principes de la Thermodynamique (deuxième Partie); par M. *P. Duhem* 293

TOME X. (Année 1894.)

Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique; par M. *Paul Painlevé* 5

Étude sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide (*suite et fin*); par M. *H. Willotte* 93

Sur l'application des méthodes d'approximation successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires; par M. *Lindelöf* 117

Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences); par M. *R. Perrin* 129

Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques; par M. *G. Humbert* 203

Note au sujet du Mémoire précédent; par M. *Paul Painlevé* 169

Commentaire aux principes de la Thermodynamique (troisième Partie); par M. *P. Duhem* 207

Note au sujet d'un Mémoire de M. *Painlevé* sur les équations de la Dynamique; par M. *R. Liouville* 287

Sur la généralisation des fractions continues algébriques; par M. *H. Padé* 291

Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques; par M. *L. Raffy* 331

Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé; par M. *Maurice Hamy* 391

Sur la surface de Kummer; par M. *G. Humbert* 473

TABLE DES MATIÈRES

PAR

NOMS D'AUTEURS.

A

MM.

ANGLIN (A.-H.). — Sur le coefficient du terme général dans certains développements; t. II, p. 139.

APPELL (P.). — Sur l'inversion des intégrales abéliennes; t. I, p. 245.

— Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$; t. III, p. 5.

— Sur les invariants de quelques équations différentielles; t. V, p. 360.

— Sur les fonctions périodiques de deux variables; t. VII, p. 157.

— Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur; t. VIII, p. 187.

MM.

AUTONNE (Léon). — Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. *Premier Mémoire :* Généralités et groupes quadratiques; t. I, p. 431; *Deuxième Mémoire :* Groupes cubiques; t. II, p. 49.

— Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact; t. III, p. 63.

— Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. *Premier Mémoire :* Étude d'une substitution crémonienne isolée; t. IV, p. 177; *Second Mémoire :* Multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques, groupe directeur; t. IV, p. 407.

C

CASPARY (F.). — Extrait d'une lettre à M. *Hermite;* t. V, p. 73.

— Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduites desdites relations; t. VI, p. 367.

CELLÉRIER — Lois des chocs moléculaires; t. VII, p. 109.

— Sur quelques effets des tremblements de terre; t. VII, p. 271.

D

DARBOUX (G.). — Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe; t. I, p. 403.

— Sur la résolution de l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

MM.
et de quelques équations analogues; t. III, p. 305.
DAVID. — Applications de la dérivation d'Arbogast. Formule générale pour le changement de la variable indépendante; t. III, p. 53.
DOLBNIA (J.). — Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel; t. VI, p. 293.
MM.
DUHEM (P.). — Sur un théorème d'Électrodynamique; t. IV, p. 369; Note rectificative; t. V, p. 53.
— Commentaire aux principes de la Thermodynamique; t. VIII, p. 269; t. IX, p. 293; t. X, p. 207.

G

GILBERT (G.). — Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires; t. IV, p. 465.
GORDAN (Paul). — Sur les équations du cinquième degré; t. I, p. 455.
GOURSAT (E.). — Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer; t. III, p. 255.
GUTZMER (August). — Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur; t. VI, p. 405.

H

HADAMARD (J.). — Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor; t. VIII, p. 101.
— Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann; t. IX, p. 171.
HALPHEN (G.-H.). — Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires; t. I, p. 11.
— Sur le mouvement d'un solide dans un liquide; t. IV, p. 5.
— Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$; t. V, p. 5.
— Sur les formes différentielles associées; t. VI, p. 211.
HAMY. — Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes; t. VI, p. 69.
— Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé; t. X, p. 391.
HERMITE. — Sur les fonctions holomorphes; t. I, p. 9.
HILBERT (David). — Lettre adressée à M. Hermite; t. IV, p. 249.
HUGONIOT (H.). — Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie), t. IV, p. 477; (seconde Partie), t. IV, p. 153.
HUMBERT (G.). — Application géométrique d'un théorème de Jacobi; t. I, p. 347.
— Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques; t. II, p. 239.
— Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques; t. III, p. 327.
— Sur les courbes cycliques de direction; t. IV, p. 129.
— Sur les courbes algébriques planes rectifiables; t. IV, p. 133.
— Sur quelques propriétés des aires sphériques; t. IV, p. 313.
— Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie; t. V, p. 81; t. VI, p. 233.
— Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre; t. VI, p. 423.
— Sur la surface desmique du quatrième ordre; t. VII, p. 353.
— Théorie générale des surfaces hyperelliptiques; t. IX, p. 29 et 361.
— Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques; t. X, p. 169.
— Sur la surface de Kummer; t. X, p. 473.

J

JABLONSKI. — Sur une loi de Fresnel; t. II, p. 441.
— Théorie des permutations et des arrangements *circulaires* complets; t. VIII, p. 331.
JORDAN (Camille). — Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même; t. IV, p. 349.
— Georges Halphen; t. V, p. 345.

MM.
— Liste des travaux mathématiques de *Georges-Henri Halphen*; t. V, p. 352.

MM.
— Remarques sur les intégrales définies; t. VIII, p. 69.

K

KLEIN (F.). — Sur la résolution, par les *fonctions* hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique (Extrait d'une lettre adressée à M. *C. Jordan*); t. IV, p. 169.

KOBB (Gustaf). — Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables; t. VIII, p. 385.

KOENIGS (G.). — Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque; t. V, p. 321.

L

LAGUERRE (E.). — Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels; t. I, p. 135.

LÉAUTÉ (H.). — Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement; t. III, p. 465.

LE CORDIER (Paul). — Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires : hypothèses qui déterminent ces fonctions; t. I, p. 357.

LÉVY (Lucien). — Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles; t. VIII, p. 351.

LÉVY (Maurice). — Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel; t. IV, p. 257.

LINDELÖF. — Sur l'application des méthodes d'approximation successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires; t. X, p. 117.

LIOUVILLE (R.). — Note au sujet d'un Mémoire de M. *Painlevé* sur les équations de la Dynamique; t. X, p. 287.

LIPSCHITZ. — Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle (Extrait d'une lettre adressée à M. *Hermite*); t. II, p. 219.

— Recherches sur la transformation par des substitutions réelles d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même. (Traduit par M. *J. Molk*); t. II, p. 373.

M

MANNHEIM (A.). — Mémoire d'optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques; t. II, p. 4.

MARTIN KRAUSE. — Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce; t. III, p. 87.

P

PADÉ (H.). — Sur la généralisation des fractions continues algébriques; t. X, p. 291.

PAINLEVÉ (Paul). — Mémoire sur la transformation des équations de la dynamique; t. X, p. 5.

— Note au sujet du Mémoire de M. *Georges Humbert* : Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques; t. X, p. 203.

PEPIN (le P.) S. J. — Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la théorie des nombres; t. IV, p. 83.

— Sur quelques formes quadratiques quaternaires; t. VI, p. 5.

PERRIN (R.). — Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences); t. X, p. 129.

PICARD (Émile). — Sur les fonctions hyperabéliennes; t. I, p. 87.

MM.
— Sur les intégrales des différentielles totales algébriques de première espèce: t. I, p. 281.
— Sur les intégrales des différentielles totales de seconde espèce: t. II, p. 329.
— Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables; t. V, p. 135.
— Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. t. VI, p. 145; rectification au sujet de ce Mémoire; t. VI, p. 231.
— Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées; t. VIII, p. 5.
— Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe; t. VIII, p. 217.

MM.
— Sur l'application des méthodes d'approximation successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires; t. IX, p. 217.
— De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée; t. IX, p. 273.

POINCARÉ (H.). — Sur les courbes définies par les équations différentielles; t. I, p. 167; t. II, p. 151.
— Sur les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique; t. III, p. 405.
— Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes; t. VI, p. 313.
— Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff; t. VIII, p. 25.

R

RAFFY (L.). — Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques; t. X, p. 331.

RIBAUCOUR (Albert). — Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes; t. VII, p. 5 et 219.

RIVEREAU (P.). — Sur les invariants de quelques équations différentielles; t. VIII, p. 233.

S

SAINT-GERMAIN (A. de). — Sur une application des équations de Lagrange; t. I, p. 129.

STIELTJES (T.-J.). — Sur le développement de l'expression

$$R^2 - 2Rr\,[\cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y')] + r^2\}^{-1};$$

t. V, p. 55.
— Sur le développement de $\log \Gamma(a)$; t. V, p. 425.

SYLOW. — Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques; t. III, p. 109.

T

TEIXEIRA (F. Gomes). — Sur le développement des fonctions implicites; t. V, p. 67.

V

VALLÉE-POUSSIN (C.-J. de la). — Recherches sur la convergence des intégrales définies; t. VIII, p. 421.

W

WEIERSTRASS (K.). — Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites *arbitraires* d'une variable réelle (traduit par M. *Léonce Laugel*); t. II, p. 105 et 115.

WILLOTTE (H.). — Études sur l'emploi des percussions dans la théorie des mouvements d'un solide plongé dans un fluide, t. VII, p. 399; t. IX, p. 5; t. X, p. 93.

TABLE GÉNÉRALE DES NOMS D'AUTEURS

DES CINQUANTE-NEUF VOLUMES DES QUATRE SÉRIES (1856-1894).

A

Abria, **1**, IV, 248.
Académie de Berlin (*voir* Berlin).
Académie des Sciences de Paris (*voir* Paris).
Académie des Nuovi Lincei (*voir* Nuovi Lincei).
Adams (J.-C.), **3**, II, 5, 69.
Aimé, **1**, I, 335.
Allégret, **3**, I, 241, 277; III, 422.
Amiot, **1**, VIII, 161; X, 109; XII, 129.
Ampère, **1**, I, 211.
André (Désiré), **3**, V, 21, 131; VI, 27; VII, 167, 283.
Anglin, **4**, II, 139.
Aoust (l'abbé), **1**, XI, 184. — **3**, IX, 43.
Appell (P.), **3**, VIII, 173; IX, 5; X, 407. — **4**, I, 245, III, 5; V, 360; VII, 157; VIII, 187.
Autonne (Léon), **4**, I, 431; II, 49; III, 63; IV, 177, 407.

B

Bach, **2**, VII, 49.
Bachmann, **2**, X, 209.
Barbier (E.), **2**, V, 273.
Bazin, **1**, XVI, 145, 161; XIX, 209, 215.
Berlin (Académie de), **2**, IX, 247.
Bertrand (J.), **1**, IV, 495; VI, 14; VII, 35, 55, 165, 212, 215; VIII, 110, 155, 209; IX, 117, 133; XI, 379; XII, 121, 343; XIII, 73, 80, 185, 231, 423; XIV, 1, 123, XV, 332; XVI, 212; XVII, 121, 175, 393. — **2**, I, 379; II, 113; IV, 427; XI, 217. — **3**, I, 181.
Besge, **1**, VII, 516; IX, 294, 336; XI, 96, 445; XIV, 31; XV, 247; XVIII, 112, 168. — **2**, III, 324, 416; IV, 72, 194; V, 367; VI, 239; VII, 256; XI, 328.
Bienaymé, **1**, XVII, 33; XVIII, 299. — **2**, XII, 158.
Binet (J.), **1**, II, 248, 457; IV, 79; V, 361; VI, 61, 449, 495; VIII, 391.
Biver, **1**, XVIII, 169.
Bjœrling, **1**, XVII, 454. — **2**, III, 417.
Blanchet, **1**, V, 1; VI, 65; VII, 13, 23; IX, 73.
Boileau, **2**, XIV, 361.
Boncompagni (Balthasar), **2**, X, 81.
Bonnet (Ossian), **1**, VI, 238; VIII, 73; IX, 97, 113, 116, 217; XIV, 249, 401; XVI, 191; XVII, 265, 301. — **2**, V, 153. — **3**, III, 207.
Boole (G.), **1**, XIII, 111.
Borchardt, **1**, XII, 50; XIX, 369.
Bouquet (J.), **1**, XI, 125, 446.
Bour (Ed.), **1**, XX, 185. — **2**, VIII, 1; XI, 133.
Bourget, **2**, II, 81; III, 47; VI, 33. — **3**, VIII, 413.
Bourgoin, **1**, XV, 71.
Boussinesq (J.), **2**, XIII, 209, 313, 340, 377, 425; XIV, 265; XV, 267. — **3**, III, 147; IV, 335; V, 163, 329; VI, 89, 177; VII, 147; IX, 273, 425.
Brassinne (E.), **1**, VII, 120; VIII, 46; X, 194; XI, 177; XVI, 255, 283. — **2**, II, 145; III, 236. — **3**, VII, 215.
Bravais, **1**, VIII, 435; XIV, 137, 141; XIX, 1. — **2**, I, 44, 51.
Breton du Champ (Paul), **1**, II, 133; III, 488; V, 120; IX, 373; XI, 153; XIII, 281; XX, 209. — **2**, XI, 185; III, 89; IV, 153. — **3**, I, 81, 263; II, 175; III, 99, 323.
Breton (Philippe), **1**, X, 430; XVII, 79.
Brianchon, **1**, IV, 345.
Brioschi (Fr.), **1**, XIX, 253.
Briot, **1**, VII, 70; X, 368; XI, 174. — **2**, XI, 305; XII, 185; XIII, 304.
Brisse (Charles), **2**, XV, 281.
Brisse (G.), **3**, I, 141.

C

Cabart, **1**, IX, 175.
Caligny, **1**, III, 209, 460, 624; VI, 89, 321; VIII, 23; XII, 73, 347; XIII, 91; XV, 169, 255. — **2**, VII, 169; XI, 225, 283, 405; XII, 49, 205, 209, 217; XIII, 5, 43, 136, 372; XIV, 332, 339, 422, 435.
Caqué, **1**, X, 379. — **2**, IX, 185.
Caspary (F.), **4**, V, 73; VI, 367.
Catalan, **1**, II, 469; III, 101, 508; IV, 7, 91, 95, 323; V, 110, 264; VI, 74, 75, 81, 340, 419; VII, 1, 203, 511; VIII, 239; IX, 161; XI, 212; XII, 483; XIX, 132. — 3, I, 209.
Cauchy, **1**, II, 193, 406; V, 154, 169, 211; VII, 338; XI, 313.
Cayley (A.), **1**, IX, 285; X, 102, 242, 245, 383, 385; XI, 291, 297; XII, 231; XIII, 245, 264, 269, 275; XIV, 40; XV, 351; XIX, 193. — **2**, II, 47; XII, 137.
Cellerier, **1**, VIII, 245, 255. — **4**, VII, 109, 271.
Chartier, **1**, XVIII, 201.
Chasles, **1**, I, 187, 324; II, 37, 299, 388, 413; III, 10, 102, 385; IV, 348; V, 465; VII, 272; VIII, 215; X, 156, 204; XI, 5, 105, 120; XII, 1, 213; XIII, 16; XIX, 366, 413; XX, 305, 329. — **2**, II, 397; V, 425.
Clausius, 1, XX, 63. — **2**, III, 57; VII, 209; X, 361. — **3**, IX, 63; VIII, 73.
Clebsch, **2**, VIII, 297.
Cockle, **2**, I, 383.
Cohen-Stuart, **1**, XIII, 257.
Collet (J.), **3**, III, 61; IV, 315; IX, 257.
Combes, **1**, II, 109; IV, 243; VIII, 23.
Combescure (Édouard), **1**, XX, 337. — **3**, VII, 239.
Copenhague (Société royale de), **2**, XII, 104.
Coriolis, **1**, I, 5, 75; II, 130, 229; III, 437.
Cornaglia, **3**, VII, 289.
Coste, **1**, VII, 169, 184.
Cournot, **1**, III, 257. — **2**, XI, 133.
Curtis, **2**, I, 223; III, 79.

D

Darboux, 3, II, 240, 291; IX, 5, 377. — 4, I, 403; III, 205.
Daru (Napoléon), 1, XII, 266.
David, 3, VI, 187; VIII, 61. — 4, III, 53.
Dawidoff, 3, VIII, 389.
Delaunay, 1, III, 355; X, 38, 189, 255; XI, 209, 309; XIII, 241; IX, 29. — 2, III, 220; X, 401.
Desboves, 1, XIII, 369, 397.
Despeyrous, 2, I, 231; XI, 417; X, 55, 177; XI, 19.
Didon, 2, XIX, 230.
Dieu (Th.), 1, XIX, 345, 372. — 2, XI, 137.
Diguet, 1, XIII, 83.
Dirichlet (*voir* Lejeune-Dirichlet).
Dolbnia (J.), 4, VI, 293.
Donkio, 1, XX, 297.
Dostor, 3, X, 208; XI, 343.
Duhamel, 1, IX, 63, 214, 222; VIII, 113; XIX, 49; XX, 197; XIX, 112, 121, 337. — 2, I, 334.
Du Hays, 1, XII, 192, 325, XX, 241.
Duhem (P.), 4, IX, 369; X, 53; VIII, 269; IX, 293; X, 207.
Dupré (Athanase), 1, XI, 41; XIII, 333.
Duvis (W.), 2, XI, 188.

E

Eisenstein, 1, X, 445; XVII, 473.
Ellis [*voir* Robert (Leslie Ellis)].
Escary, 3, X, 47.

F

Faà de Bruno, 1, XX, 363; XVII, 190, 193; XIX, 304.
Farkas (Jules), 3, X, 101.
Favre Rollin, 1, I, 88, 339.
Ferriot, 1, VII, 59.
Fiedler (W.), 3, IX, 141.
Finck, 1, III, 495; IX, 334, 400; X, 171.
Flye Sainte-Marie, 3, III, 213.
Franke (J.), 3, III, 415.
Frenet, 1, XVII, 437.
Fuchs (L.), 3, II, 158; IX, 125.

G

Galois (Evariste), 1, XI, 381.
Gascheau, 1, VI, 241; VII, 126.
Gauss, 1, VI, 273; VII, 273. — 2, I, 9.
Genocchi (Angelo), 1, XIX, 281. — 2, XI, 177.
Genty, 3, VII, 49; VIII, 299.
Germain (M[lle] Sophie), 3, VI, supplément, 5.
Gilbert (G.), 4, IV, 465.
Gilbert (Ph.), 2, XXII, 87. — 3, X, 429.
Giulio, 1, IX, 386.
Gordan (Paul), 4, I, 455.
Gournerie (de la), 1, XIX, 417; XX, 145. — 2, III, 73; VIII, 52; IX, 401; X, 33; XIV, 9, 103, 425; XX, 1.
Goursat (E.), 4, III, 255.
Gouy, 3, VIII, 335.
Grillet, 1, X, 233; XI, 104.
Guérard, 1, III, 483.
Guibert, 1, III, 25; IV, 392; VII, 414.
Guieysse (Paul), 3, I, 399.
Guilhem (*voir* Saint-Guilhem).
Guillon, 1, XI, 216.
Gunther (Sigismond), 3, II, 331.
Gutzmer (August), 4, VI, 405.
Guyou, 3, X, 69.

H

Hadamard (J.), 4, VIII, 101; IX, 171.
Hall (Asaph), 3, V, 143.
Halphen (G.-H.), 3, II, 87; II, 257, 371; V, 285. — 4, I, 11; IX, 5; V, 5; VI, 211.
Hamy, 4, VI, 69; X, 391.
Hansen, 2, III, 209.
Haton de la Goupillière, 2, IX, 183; XI, 329; XIII, 204. — 3, II, 241.
Heine, 3, II, 155.
Hermite, 1, IX, 353; XIII, 15; XIV, 21, 451. — 2, III, 26, 37; VII, 25; IX, 145, 289, 313. — 3, VI, 5. — 4, I, 9.
Hilbert (David), 4, IX, 249.
Hirst, 2, II, 385, 392.
Holmgren, 1, XVI, 186.
Housel, 1, I, 193; III, 153; V, 129.
Hugo Gyldén, 3, II, 411.
Hugoniot (H.), 4, III, 477; IX, 153.
Humbert (G.), 4, I, 347; II, 239; III, 327; IX, 129, 133, 313; X, 81; VI, 233, 423; VII, 353; IX, 29, 361; X, 169, 473.

I

Ivory, 1, II, 105.

J

Jablonski (E.), 3, X, 147, 329. — 4, II, 441; VIII, 331.
Jacobi, 1, I, 195; II, 105, 146; III, 44, 60, 161; X, 350; XI, 267; XII, 85; XIII, 268, 502; IX, 313; X, 229, 337, 435; XI, 97, 237, 341; XII, 97; XIII, 412, XIV, 181, 337; XX, 357.
Jellett, 1, XII, 92; XVIII, 163.
Joachimsthal, 1, XIII, 415.
Jonquières (de), 2, I, 411; II, 153, 249, 267; III, 53; IX, 49, 81; VI, 113; VII, 409; VIII, 71; X, 412.
Jordan (Camille), 2, XI, 105, 110; XII, 105, 109; XIII, 111; XIX, 139, 147. — 3, I, 7, II, 177; X, 345. — 4, IX, 349; V, 345, 352; VIII, 69.
Joubert, 1, XIII, 241.
Jourdain, 2, IX, 205.
Joukovsky (N.), 3, IX, 417, 425; X, 97.
Jullien, 2, I, 495.

K

Klein (F.), 4, IV, 169.
Koble (Gustaf), 4, VIII, 385.
Kœnigs (G.), 4, X, 321.
Kronecker, 1, XIX, 177, 279. — 2, I, 385, 392, 396, 399; III, 265; X, 289.
Kummer, 1, IX, 390; XII, 136, 185; XVI, 377. — 2, V, 369.

L

La Gournerie (de) [*voir* Gournerie (de la)].
Laguerre (E.), 2, XV, 193. — 3, I, 199, 265; II, 145; IV, 213, 247; VI, 99; IX, 95. — 4, I, 135.
Laisant, 3, III, 325.
Lalanne (L.), 3, X, 107.
Lamarle (Ernest), 1, XI, 129, 254; XII, 305. — 2, IX, 241.
Lamé, 1, I, 77; II, 147; III, 505, 552; IV, 100, 126, 351; X, 195, 313; VI, 37; VIII, 397, 515; XII, 137, 172; XVI, 171; XIX, 51.
Laurent (H.), 3, I, 75, 373; II, 420; IV, 225; V, 249.
Léauté (H.), 3, VI, 215; VII, 185; IX, 245; X, 367. — 4, III, 465.
Le Besgue, 1, I, 266; II, 253, 337; III, 113; IX, 9, 60; X, 42, 184, 276, 348, 281; VI, 17, 137; VIII, 49; X, 316; XI, 76, 331, 336, 338; XII, 457, 497; XX, 215; XVIII, 73; XIX, 289, 334. — 2, I, 377, 401; II, 149; III, 391; IX, 105, 336; VII, 417.
Le Cordier (Paul), 3, X, 43, 113, 281. — 4, I, 357.
Lefort (F.), 1, XI, 142.
Legebeke (G.-J.), 3, X, 109.
Léger, 1, I, 193.

Lejeune-Dirichlet, **1**, IV, 164, 393; V, 72; IX, 245; XII, 474. — **2**, I, 76, 80, 210, 353, 371; II, 57, 217, 273, 353, 373, 375; IV, 209, 233, 367, 389, 401; VII, 253.
Lemmi (Émile), **3**, II, 233.
Leslie [*voir* Robert (Leslie Ellis)].
Le Verrier, **1**, V, 95, 220; XIII, 273.
Lévy (Lucien), **4**, VIII, 351.
Lévy (Maurice), **3**, III, 219; X, 15. — **4**, IV, 257.
Libri, **1**, I, 10.
Lindelöf, **4**, X, 117.
Liouville (E.), **1**, XIX, 139, 409; XX, 105.
Liouville (J.), **1**, I, 1, 14, 33, 102, 197, 253, 269, 278, 445; II, 1, 16, 56, 107, 135, 206, 220, 245, 418, 439, 483; III, 1, 20, 31, 255, 337, 342, 350, 435, 523, 561; IV, 1, 169, 225, 317, 423, 483, 493, 501; V, 31, 34, 192, 193, 280, 311, 351, 356, 360, 441; VI, 1, 36, 69, 345, 448; VII, 110, 134, 160, 163, 190, 268; VII, 265, 360, 391, 502, 507, 513; IX, 337, 350, 401, 435; X, 169, 222, 290, 293, 327, 456, 466; XI, 21, 87, 217, 261, 345, 458, 462, 464, 466; XII, 68, 95, 255, 265, 291, 410; XIII, 34, 172, 220; XIV, 225, 257; XV, 103; XVI, 6, 130, 133, 241; XVII, 31, 340, 391, 448, 478; XVIII, 71; XIX, 151, 395; XX, 115, 133, 135, 137, 143, 157, 161, 164, 201, 203, 395. — **2**, I, V, 1, 7, 82, 150, 230, 248, 289, 295, 297, 345, 349, 351, 421, 445; II, 47, 56, 110, 141, 244, 277, 279, 280, 351, 377, 395, 408, 409, 413, 424, 425, 433; III, 1, 63, 69, 84, 143, 193, 201, 241, 273, 325, 357; IV, 1, 47, 73, 111, 155, 195, 271, 281, 329; V, 1, 103, 119, 127, 139, 141, 143, 267, 269, 287, 300, 301, 303, 305, 309, 311, 387, 389, 391, 455, 475; VI, 1, 7, 28, 31, 55, 93, 97, 101, 103, 105, 107, 109, 135, 147, 150, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 219, 225, 233, 324, 369, 409, 440; VII, 1, 5, 9, 13, 17, 19, 21, 23, 41, 44, 62, 65, 69, 73, 77, 99, 103, 105, 109, 113, 117, 136, 143, 145, 148, 150, 153, 155, 157, 161, 165, 201, 205, 246, 249, 375, 407, 421; VIII, 73, 85, 102, 105, 115, 120, 124, 129, 134, 137, 141, 161, 169, 173, 177, 179, 181, 185, 189, 193, 205, 209, 214, 219, 225, 227, 229, 239, 241, 243, 249, 253, 255, 296, 308, 311, 341, 347; IX, 1, 13, 17, 23, 84, 89, 105, 115, 119, 123, 135, 137, 160, 161, 175, 181, 183, 223, 249, 257, 273, 281, 296, 299, 321, 389, 421; X, 1, 9, 14, 21, 43, 49, 65, 71, 73, 77, 135, 145, 151, 155, 161, 169, 203, 234, 281, 285, 289, 293, 295, 359; XI, 1, 39, 41, 103, 131, 191, 211, 221, 280; XII, 47, 98; XIII, 1; XIV, 1, 7, 260, 263, 298, 302, 359; XV, 7, 133.
Liouville (R.), **4**, X, 287.
Lipschitz, **4**, II, 219, 373.
Lobatto, **1**, X, 115; IX, 177, 295; XI, 193; XII, 117.
Lucas (F.), **2**, VI, 137; VIII, 145; XV, 137.

M

Mac-Cullagh, **1**, VII, 217.
Mannheim, **2**, IV, 93; VII, 121; XI, 193, 273. — **3**, I, 57; IV, 57; VIII, 167. — **4**, II, 54.
Marie (Maximilien), **2**, III, 361; IV, 121, 305, 369; V, 43, 393, 457; VI, 57, 153, 377; VII, 81, 425.
Marre (A.), **1**, XIII, 233. — **2**, X, 117.
Martin Krause, **4**, III, 87.
Mathet, **2**, VI, 329; VIII, 313, 233.
Mathieu (Emile), **2**, IV, 429; V, 9; VI, 241; XI, 49, 298; XII, 377; XIII, 137; XIX, 65, 241, 378; XX, 117. — **3**, I, 183; II, 33, 161, 345; III, 5, 216; IV, 61; V, 5, 379; VII, 201, 219; VIII, 5, 357.
Maupeou (de), **3**, VI, 267.
Maximowitch, **3**, I, 57.
Méray (Ch.), **3**, VI, 235; X, 181.
Minding, **1**, XI, 412. — **2**, IX, 273.
Miquel, **1**, III, 202, 485, 517; IX, 20; X, 347; XI, 65.
Moigno, **1**, V, 75.
Molins, **1**, III, 33; IV, 509; VIII, 132, 379; XII, 394. — **2**, I, 265; IV, 347. — **3**, IV, 187.
Mondésir, **1**, II, 3.

N

Neumann, **1**, XII, 369; XIII, 113.
Nuovi Lincei (Académie des), **2**, X, 350.

O

Olivier (Th.), **1**, III, 145, 249, 335; IV, 189, 281, 304; V, 146; VI, 297.
Ossian Bonnet (*voir* Bonnet).
Ostrogradski, **2**, I, 287.

P

Padé (H.), **4**, X, 291.
Pagès, **1**, II, 437.
Painlevé (Paul), **4**, X, 5, 203.
Painvin, **1**, XIX, 88. — **2**, III, 41; VI, 209.
Paris (Académie des Sciences de), **2**, X, 25.
Pepin (le P.), **2**, XV, 217. — **3**, I, 317; II, 313; X, 21, 405; XII, 71.
Perrin (R.), **4**, X, 129.
Phillips (Ed.), **1**, XIV, 300. — **2**, V, 313.
Picard (Emile), **4**, I, 87, 281; II, 329; V, 135; VI, 145, 231; VIII, 5, 217; IX, 217, 273.
Pluecker, **1**, I, 229; II, 11. — **2**, XI, 337.
Poincaré (H.), **3**, VII, 375; VIII, 251. — **4**, I, 167; II, 151; III, 405; VI, 313; VIII, 25.
Poinsot, **1**, III, 244; X, 1; XI, 241; XVI, 9, 289; XVIII, 41. — **2**, II, 281; IV, 161, 171, 421, 427, 429.
Poisson, **1**, II, 140, 184, 189, 224, 312, 317, 373; III, 4, 615; XIII, 87, 249; XIX, 33, 242; XV, 365; XVI, 208, 228; XVII, 1.
Polignac (de), **1**, XIX, 305.
Popoff, **1**, XV, 78. — **2**, III, 251.
Prouhet, **2**, I, 215, 321.
Puiseux, **1**, VII, 65, 517; VIII, 71; IX, 377, 409; XI, 477. — **2**, V, 65, 105; VI, 366; VIII, 335; XV, 9.

Q

Quet, **1**, XVIII, 213; XX, 1.

R

Raabe, **1**, VI, 85.
Rachmaninow, **2**, III, 395.
Radau, **2**, XIV, 167. — **3**, VI, 283.
Raffy (L.), **4**, X, 331. — **4**, X, 352.
Rédacteur (Le), **3**, I, 5; VII, 109.
Reech, **1**, XVIII, 357; XX, 87. — **2**, I, 58.
Resal (H.), **3**, I, 43, 121; II, 165,

342; III, 79, 115, 307; X, 227, 319; XI, 49, 85, 115; XII, 33, 129, 341; XIII, 55, 79, 217, 383; IX, 25, 65, 195.
Ribaucour (Albert), **4**, VII, 5, 219.
Richaud (Casimir), **2**, IX, 384; X, 235; XI, 145.
Richelot, **1**, XI, 25.
Riffault, **2**, XI, 133.
Rispal, **1**, XII, 225.
Rivereau (P.), **4**, VIII, 233.
Robert (Leslie Ellis), **1**, IX, 422.
Roberts (Michael), **1**, X, 251, 466; XI, 1, 300; XII, 491; XIII, 1; XV, 275, 323.
Roberts (William), **1**, VIII, 363; IX, 155; X, 177, 297, 451, 453; XI, 81, 124, 157, 201, 210, 343, 471; XII, 41, 445, 449, 479; XIII, 38, 179, 209; XV, 194, 209, 238; XVI, 1, 143, 117. — **2**, II, 213.
Roche, **2**, III, 271; IX, 129.
Rodrigues (Ol.), **1**, III, 547, 549, 550; IV, 236; V, 380; VIII, 217, 225.
Roger, **1**, XIII, 41; XVII, 202.
Romilly (Worms de), **3**, IV, 177.
Rouché, **2**, III, 337.

S

Saint-Germain (A. de), **3**, II, 325; III, 401; VI, 19; VIII, 297. — **4**, I, 129.
Saint-Guilhem, **1**, I, 309, 317; IX, 1; XVI, 347; XIX, 356. — **2**, IV, 57.
Saint-Venant, **1**, IX, 191, 270, 275, 310. — **2**, I, 89; VIII, 257, 353; X, 297; XII, 237; XIII, 242; XIV, 321; XV, 237, 250, 271.
Sarrau, **2**, XII, 1; XIII, 59.
Sarrus, **1**, VI, 171; XIV, 131.
Sauvage, **3**, X, 187.
Schering, **2**, IV, 253.
Schiff, **3**, IX, 407.
Schlaefli, **1**, XX, 359.
Schlloemilch, **2**, II, 43, 47, 206; III, 384, 385; VIII, 89, 99.
Schröter, **2**, III, 228.
Schwartz, **3**, VI, 107.
Selling (Édouard), **3**, III, 21, 153.
Senarmont, **1**, VIII, 361. — **2**, I, 305.
Serret, **1**, VII, 114; VIII, 1, 145, 489, 495; IX, 28, 160, 193, 436; X, 257, 286, 351, 421; XI, 89, 451; XII, 241, 480, 518; XIII, 12, 17, 353, 361; XIV, 47, 135; XV, 1, 45, 152, 296; XVI, 193, 499; XVII, 186; XVIII, 1, 113.
Serret (Paul), **2**, VI, 9; VII, 377.
Sire (G.), **3**, VII, 161.
Société royale de Copenhague (*voir* Copenhague).
Souchon (Abel), 3, VI, 337.
Soufflet, **1**, XV, 104.
Sourander (E.), **3**, V, 195.
Sperling (de), **2**, V, 121.
Steichen, **1**, XIII, 221, 344.
Steiner, **1**, VI, 105; XI, 468; XVIII, 309; XX, 36.
Stern, **1**, V, 216.
Stieltjes (T.-J.), **4**, X, 55.
Stoffel, **2**, VII, 49.
Stouvenel, **1**, V, 265.
Sturm, **1**, I, 106, 278, 290, 373; II, 220; III, 357; VI, 315; VII, 132, 345, 356. — **2**, I, 231.
Sucksdorff, **2**, II, 91.
Svanberg, **1**, XI, 197.
Sylow, **4**, III, 109.

T

Tchebichef, **1**, VIII, 235; XVI, 257, 337; XVII, 341, 366; XVIII, 87. — **2**, II, 1, 166; III, 289; IX, 225, 242; X, 353; XII, 177; XIII, 9.
Teixeira (F. Gomès), **3**, VII, 277; **4**, V, 67.
Terquem, **1**, II, 36; III, 17, 97, 477, 556, 559; IV, 175, 177, 241; V, 7, VI, 275.
Tessan (de), **2**, XI, 266.
Thomson (William), **1**, IX, 239; X, 137, 209, 364; XII, 256, 493; XVII, 209.
Tisserand (F.), **2**, XIII, 255. — **3**, II, 169.
Tissot, **1**, XVII, 88, 177.
Transon, **1**, I, 191; IV, 457; VI, 191, 441; IX, 369; X, 148, 320.

V

Vallée Poussin (C.-J. de la), **4**, VIII, 421.
Vallier (E.), **3**, IX, 147.
Vaneček (M.-N.), **3**, IX, 269.
Venant (*voir* Saint-Venant).
Vieille, **1**, X, 329; XIV, 201; XX, 121.
Villarceau (Yvon), **2**, XII, 65; XV, 311. — **3**, IV, 119, 305.
Villié, **3**, IV, 257.
Vincent, **1**, I, 341; III, 235; IV, 261.
Voizot, **1**, XV, 481; XVII, 253.

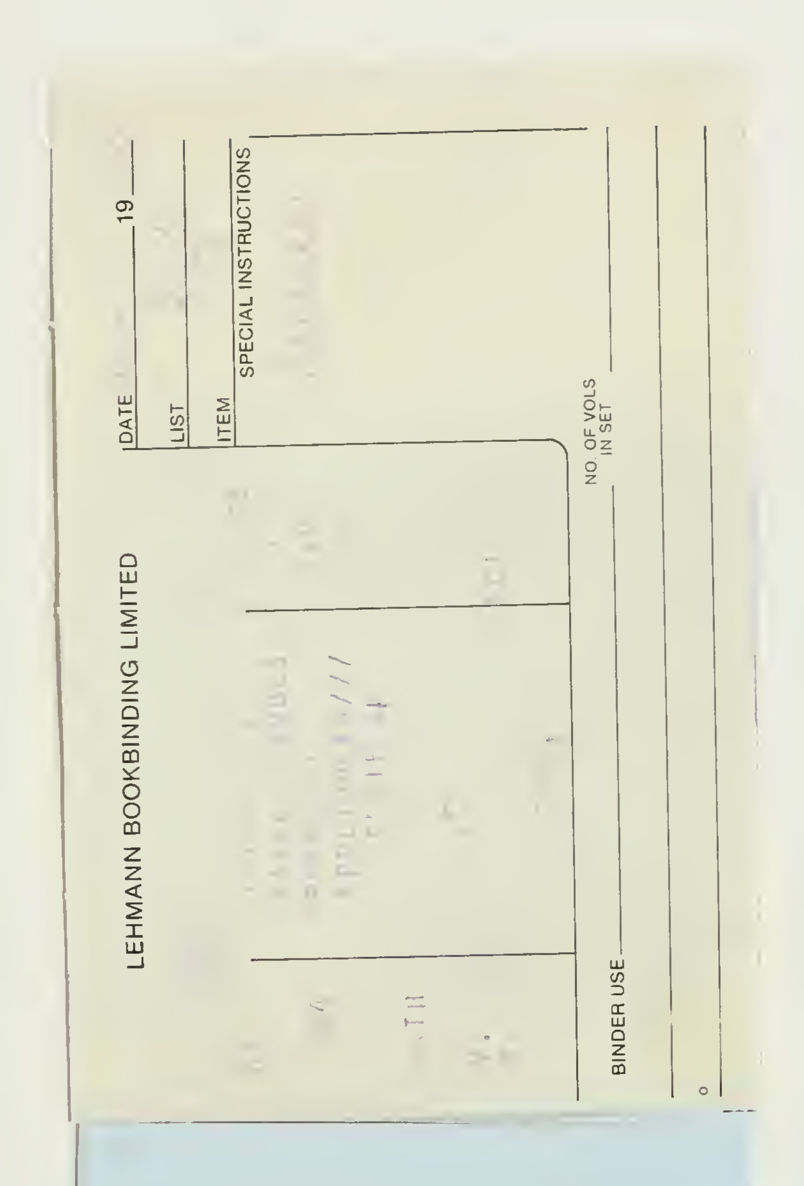
W

Wantzel, **1**, II, 366; IV, 185; XIV, 111.
Weichold (Guido), **3**, V, 293.
Weierstrass (K.), **1**, XIX, 257. — **4**, II, 205, 115.
Weiler (A.), **2**, XIV, 305.
Weill, **3**, IV, 265.
West (Émile), **3**, VII, 5, 111; VIII, 19, 125, 301.
Willotte (H.), **4**, VII, 399; IX, 5; X, 93.
Winckler, **1**, XVI, 375.
Wœpcke, **1**, XIX, 153, 301, 345, 401, 407; XX, 54, 139.
Worms de Romilly (*voir* Romilly.)

Z

Zolotareff, **3**, VI, 51, 129.

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
21992 Paris. Quai des Grands-Augustins, 55.


LEHMANN BOOKBINDING LIMITED
DATE
19
LIST
ITEM
SPECIAL INSTRUCTIONS
NO. OF VOLS IN SET
BINDER USE

